erschienen in: Beiträge zum Mathematikunterricht 2001, S.344-347, Hildesheim: Franzbecker

Christa KAUNE, Osnabrück

Anleitung zur Kognition über Metamathematik durch geeignete Aufgabenstellungen

Bei der Erprobung des Osnabrücker Curriculums (Cohors-Fresenborg, 2001) hat sich gezeigt, dass die Befähigung von Schülern zur Einnahme eines Metastandpunktes (von dem aus eine Unterscheidung zwischen Objekt- und Metasprache oder aber die Verbindung von Elementen des Nachdenkens über Metamathematik mit metakognitiven Aktivitäten beim Umgang mit Mathematik möglich sind) zur Förderung der Unterrichtskultur und des Unterrichtserfolges nützlich ist. Die Untersuchung dieser Wechselwirkung gehört zu einem DFG-Projekt „Analyse von Unterrichtssituationen zur Einübung von Reflexion und Metakognition im gymnasialen Mathematikunterricht der S I".

Bevor wir geeignete Aufgabenbeispiele und zugehörige Schülereigenproduktionen vorstellen und analysieren, wollen wir kurz an Hand von Beispielen dargestellen, wie wir die beiden Begriffsnetze, die sich um die Worte „Metasprache" und „Metamathematik" gruppieren, verwenden.

Ein Metastandpunkt wird z.B. eingenommen beim Nachdenken über die Frage, wie viele Zeilen ein aufgeschriebener mathematischer Beweis hat. In ähnlicher Weise ist die Frage zu bewerten, ob es sich bei einer betrachteten Umformung einer Gleichung um eine Äquivalenzumformung handelt. Das Reden darüber, wie viele Zeilen ein Beweis hat, bzw. die Feststellung des Vorliegens einer Äquivalenzumformung vollziehen sich in einer anderen Sprache als der mathematischen Formelsprache, es handelt sich also um ein Reden in einer bezogen auf die Objektsprache der mathematischen Formelsprache gegebenen Metasprache, trotzdem sehen wir dieses nicht als ein Teil metamathematischer Überlegungen an, weil die herangezogenen Begründungen Teile der mathematisch inhaltlichen Theorie sind bzw. beim Zählen der Beweiszeilen Alltagswissen vorliegt, welches eine Verwendung des Wortes „Metamathematik" nicht rechtfertigt.
Wenn Schüler aber über die Struktur eines indirekten Beweises diskutieren oder über die Frage, ob ein vorliegender mathematischer „Satz" eine Definition, ein beweisbarer Satz oder ein neuer Paragraph in einem Vertragswerk zum Umgang mit Begriffen sein soll, dann zählen wir solche Überlegungen auch zur Metamathematik.

Wenn im Mathematikunterricht diskutiert wird, ob bei einer gegebenen Verwendung von Mathematik im Alltag es sich um eine normative oder deskriptive Verwendung von Mathematik handelt, oder ob eine vorgenommene mathematische Modellierung dem gestellten Problem angemes-

sen ist, handelt es sich um ein Nachdenken über das Benutzen von Mathematik, welches in einer nicht mathematischen Sprache stattfindet, die bezogen auf diese eine Metasprache darstellt. Es ist nicht üblich, für dieses Nachdenken den Begriff „Metamathematik“ zu verwenden.
Aber auch den Begriff "Metakognition" halten wir nicht für angemessen, da sich dieses Nachdenken eher auf die mathematische Lösung als auf das dazu führende Denken bezieht.

Beispiel für eine Aufgabe, die zu metamathematischer Tätigkeit anregt
Zum Standardstoff des gymnasialen Mathematikunterrichts gehört im Zusammenhang mit der Einführung der reellen Zahlen in der Mittelstufe ein Irrationalitätsbeweis von $\sqrt{2}$. Dieser wird in Form eines Widerspruchsbeweises geführt. Die folgenden Aufgaben (Cohors-Fresenborg, Kaune, Griep, 1996, S. 23) verlangen von den Schülern eine Analyse der Gemeinsamkeiten eines indirekten mathematischen Beweises und einer fiktiven Argumentation vor Gericht, wie in der Bankräuber-Geschichte dargestellt.

Das Beweisen ist jedoch nicht nur eine Sache der Mathematiker. Auch vor Gericht werden Beweise geführt, wie folgende Geschichte zeigt:

Ein Mann wird beschuldigt, am 05.03.84 um 16.00 Uhr in A-Dorf einen Banküberfall begangen zu haben. Der Bankräuber war maskiert, so daß ihn niemand erkennen konnte. Der Angeklagte bestreitet, der Täter gewesen zu sein. Ein Zeuge hat den Angeklagten am 05.03.84 um 17.00 Uhr in B-Dorf gesehen. Ermittlungen der Polizei ergeben, daß die Strecke zwischen A-Dorf und B-Dorf nicht schneller als in 90 Minuten zurückgelegt werden kann.
Der Richter schließt sich der Argumentation des Verteidigers an und spricht den Angeklagten frei.
Der Verteidiger hält folgendes Plädoyer :

1. Angenommen, der Angeklagte wäre der Täter.
2. Daraus folgt, daß er um 16 Uhr in A-Dorf gewesen ist.
3. Dann kann er frühestens um 17.30 in B-Dorf gewesen sein.
4. Ein Zeuge hat ihn um 17 Uhr in B-Dorf gesehen.
5. Die Aussagen 3. und 4. widersprechen sich.
6. Die Annahme muß verworfen werden.
7. Es gilt das Gegenteil der Annahme 1: Der Angeklagte war nicht der Täter.

Zu dieser Geschichte kann man sich verschiedenartige Aufgabenstellungen vorstellen, um die Tiefe des Beweisverständnisses zu überprüfen, z.B.:

- *„Lege die Parallelen dar, die es zwischen der Rede des Verteidigers und den Schlussweisen der Mathematiker gibt, indem du das „entsprechende Urteil der Mathematiker" weiter ausführst:*
  1. Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl."

oder

- *„Verfasse ein geeignetes Plädoyer und fälle ein Urteil über den Wahrheitsgehalt der Aussage: $\sqrt{2}$ ist eine abbrechende Dezimalkommazahl, die jedoch mehr als zehn Nachkommastellen hat."*

Immer wird es darum gehen, Gemeinsamkeiten in der logischen Struktur von Argumentationen heraus zu arbeiten. In dem Ausmaß, in dem dieses zu einer generellen Sichtweise der Struktur solcher Argumentationen führt, halten wir diese Aktivität für eine metamathematische.

Analyse von zwei Schülerlösungen

In einer Klassenarbeit einer 9. Jahrgangsstufe waren unter anderem in der Aufgabe 2 zwei Irrationalitätsbeweise zu führen. Im Aufgabenteil c wurde den Schülern die bis dahin nicht im Unterricht behandelte Bankräuber-Geschichte vorgelegt mit einer weiteren Aufgabenstellung: *Erkläre anhand der Geschichte die einzelnen Strukturelemente eines indirekten Beweises.*

Der Schüler Simon bearbeitet die Aufgabe folgendermaßen:

1) Man stellt eine Behauptung auf.
2) Das log. Gegenteil der Behauptung ist dann die Annahme.
3) Man folgert so lange, bis sich ein Widerspruch zur Annahme ergibt.
4) Die Annahme ist so widerlegt und wird verworfen.
5) Jetzt hat man indirekt bewiesen, dass die Behauptung stimmt. Die Behauptung gilt.

Simon zeigt, dass er die Strukturelemente eines indirekten Beweises gelernt hat und sie sachgemäß wiedergeben kann. In keinem einzigen Wort stellt er den Bezug zu der Bankräuber-Geschichte her. Die von ihm zur Strukturierung seiner Antwort verwendeten Nummern finden auch nicht ihr Pendant in den Nummern der einzelnen Argumentationen, die in der Bankräuber-Geschichte verwendet werden. Er bleibt bei seiner Bearbeitung auf der Objektebene, der „Sprung" in die Metaebene gelingt ihm hier nicht.

Anders ist die folgende Lösung der Schülerin Henriette zu bewerten:

„Zuerst stellen wir eine Behauptung auf, in der Geschichte behauptet der Mann, er wäre nicht der Täter gewesen.
Dann folgt unsere Annahme. Sie ist das logische Gegenteil der Behauptung. In der Geschichte nimmt das Gericht an, er wäre der Täter, dies ist der Widerspruch zu der Behauptung des Mannes.
Bei unserem indirekten Beweis folgern wir nun aus unserer Annahme, bis wir auf ein Ergebnis kommen. In der Geschichte folgert das Gericht aus ihrer Annahme, der Mann

sei der Täter, dass er um 16:00 Uhr im Dorf A gewesen sein muss. Er konnte frühestens 17:30 Uhr im B-Dorf sein, wurde aber schon 17 Uhr dort gesehen.
Bei unserem Beweis haben wir uns nun in Widersprüche verwickelt, denn unsere letzten beiden Zeilen widersprechen sich. In der Geschichte widersprechen sich die Folgerungen auch, denn der Angeklagte hätte so schnell niemals ins B-Dorf gelangen können.
Bei dem Beweis verwerfen wir nun unsere Annahme, in der Geschichte nimmt das Gericht die Annahme zurück.
Bei unserem indirekten Beweis muss nun das logische Gegenteil der Annahme wahr sein, also unsere Behauptung.
In der Geschichte gilt auch das Gegenteil der Annahme, also die Behauptung des Mannes. Er hat Recht, denn er ist nicht der Täter."

Obwohl die Bearbeitung der Aufgabe von Henriette als fortlaufender umgangssprachlicher Text angelegt wurde, ist die durch die mathematische Sache bedingte starre Gliederung zu erkennen. Man kann sich vorstellen, dass Henriette – so wie auch Simon – sich die einzelnen Strukturelemente eines indirekten Beweises memoriert hat. Während Simon dies vermutlich losgelöst von einem konkreten Beweis getan hat, kann man aus dem Satz „*Bei unserem Beweis haben wir uns nun in Widersprüche verwickelt, denn unsere letzten beiden Zeilen widersprechen sich.*" vermuten, dass Henriette wohl einen konkreten indirekten Beweis im Kopf durchgegangen ist und dazu die Parallelen in der Geschichte gesucht und gefunden hat.
Die Bearbeitung von Henriette zeigt, dass ihr die Strukturelemente eines indirekten Beweises so deutlich bewusst sind, dass sie diese auch in der Analogie zwischen dem Beweis und der Geschichte herausarbeiten kann. Wir sehen dies als Beispiel für ein Aufgabenformat, das von den Schülern verlangt, Elemente des Nachdenkens über metamathematische Aspekte mit metakognitiven Aktivitäten zu verbinden.

In KAUNE (2001) wird anhand von Schülereigenproduktionen aus Klassenarbeiten gezeigt, dass Fragen wie „*Brauchen wir eine vierte Binomische Formel?*" oder „*Brauchen wir einen weiteren Satz zum Lösen von Gleichungen?*" beim Antwortenden Verständnis und Kompetenz im Umgang mit metamathematischen Begriffen und Werkzeugen voraussetzen. Die Bearbeitung zeigt, wie auch hier metamathematische und metakognitive Aktivitäten verwoben sind.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. (2001): Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation: das Osnabrücker Curriculum. *Der Mathematikunterricht*, 47, Heft 1, S. 5-13.
Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. & Griep, M. (1996): Mathematik in Klasse 9. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.
Kaune, C. (2001): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als die „etwas andere Aufgabe". *Der Mathematikunterricht*, 47, Heft 1, S. 35-46.