Übungen Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler Aufgabensammlung

Roland Schwänzl

SS 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengenlehre

Aufgabe 1.1 Zeigen Sie

a) $A \subset A \cup B$

b) $A \cap B \subset A$

c) $A \subset B$ gilt genau dann, wenn $A \cup B = B$

d) $A \subset B$ gilt genau dann, wenn $A \cap B = A$

Aufgabe 1.2 Zeigen Sie

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe 1.3 Zeigen Sie:

a) $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$

b) $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$

c) Frage: Gilt für beliebige A, B, C $A - (B - C) = (A - B) - C$?

d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap B \cap C)$

e) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$

Aufgabe 1.4 Seien M, N endliche Mengen

a) Es seien $A, B \subset M$ mit $A \cup B = M$.
   Zeigen Sie: $|M| = |A| + |B| - |A \cap B|$

b) Sei $f : M \to N$ eine Funktion

$$f(M) = \{f(x) \in N,\ x \in M\}$$

   Zeigen Sie:
   $|N| \geq |f(M)| \leq |M|$ und es gilt $|f(M)| = |N|$ genau dann, wenn f surjektiv und $|f(M)| = M$ genau dann, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 1.5 Es seien A, B, C endliche Mengen mit

$$|A \cup B \cup C| = 190$$
$$|A \cap B \cup A \cap C \cup B \cap C| = 115$$
$$|A \cap B \cap C| = 80$$
$$|A| = 135$$
$$|B| = 125$$
$$|B - (A \cup C)| = 25$$
$$|A \cap C| = |B \cap C|.$$

Dabei bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M.
Berechnen Sie: 1) $|B \cap (A \cup C)|$ 2) $|A \cap B|$ und $|B \cap C|$
3) $|A - (B \cup C)|$ 4) $|C|$.

Aufgabe 1.6 Auf einen Wühltisch hatten Sie als Sets Blusen mit Gürtel und Anstecknadel gepackt. Nach einigen Tagen finden Sie noch zwei vollständige Sets vor. Der Rest ist mehr oder minder auseinandergerissen. Insgesamt sind noch 611 Blusen, 109 Anstecknadeln und 210 Gürtel vorhanden. An sechs Blusen hängt noch der Anstecker und an sieben befindet sich noch der Gürtel. Sie finden 200 lose Gürtel.

a) Wie viele Gürtel wurden von der Bluse gelöst und mit einer Anstecknadel verziert?

   (Es wurde jeweils nur ein Anstecker angebracht.)

b) Wie viele Blusen, an denen nur noch der Anstecker hängt, finden Sie?

c) Wie viele Blusen und Gürtel sind noch auf dem Tisch?

d) Wie viele Sets können Sie wieder vervollständigen?

Aufgabe 1.7 Sei M eine Menge, dann bezeichnet $P(M)$ die Menge, deren Elemente die Teilmengen von M sind. Geben Sie die Mengen $P(\emptyset)$, $P(\{1\})$ und $P(\{1,2\})$ in aufzählender Schreibweise an.

Aufgabe 1.8 a) Geben Sie alle bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich an.

1. b) Sei

$$\begin{array}{rccc} f: & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{1,2,3\} \\ & 1 & \longrightarrow & 2 \\ & 2 & \longrightarrow & 3 \\ & 3 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Bestimmen Sie alle bijektiven Abbildungen

$$g : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\} \text{ für die gilt: } f \circ g = g \circ f$$

Aufgabe 1.9 Sei

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & \dfrac{x}{1+x^2} \end{array}$$

a) Bestimmen Sie: $I = \{f(x);\ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie: f ist nicht injektiv.

c) Es sei

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & 7x+6 \end{array}$$

Bestimmen Sie den Wertebereich von $g \circ g$ und $f \circ g$.

Aufgabe 1.10 Sei $y \in]-1,+1[$. Lösen Sie die Gleichung $y = \dfrac{x}{1+|x|}$.

Aufgabe 1.11 Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

a) Zeigen Sie: Es gibt eine bijektive Abbildung $f : [a, b] \to [c, d]$

b) Gibt es mehr ein solches "f"?

c) Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} f\mathbb{R} &\to\ ]-1, 1[\\ x &\to \frac{x}{1+|x|} \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Aufgabe 1.12 Für welche $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $\dfrac{1}{x^2+6} = y$ eine Lösung? Wie viele Lösungen gibt es jeweils?

Aufgabe 1.13 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $\max(x, y) = \frac{1}{2}\left((x+y) + |x-y|\right);\ x, y \in \mathbb{R}$.

b) $|x^2 + 4x - 12| = |x + 6|$.

Aufgabe 1.14 Zeigen Sie: Es gibt ein Polynom f vom Grade genau 5, das die folgende Wartetabelle erfüllt:

a)

x	1	2	3	4	5
f(x)	9	11	19	25	53

b) Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom vom Grade ≤ 4, das die obige Tabelle erfüllt. Geben Sie dieses an.

Aufgabe 1.15 Es sei

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \leq -x + 2\}$$

und

$$M_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq -x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geq +x - 2\}.$$

Zeichnen Sie $M_1 \cap M_2$.

Aufgabe 1.16 Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ die Menge

$$\begin{aligned} Q &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \\ P &= \{(x+y,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x,\ 0 \le y,\ x+y \le 1\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Zeichnen Sie die Mengen Q, P, D.

b) Es gibt eine Bijektion $f : Q \to P$.

c) Es gibt eine Bijektion $g : Q \to D$.

Aufgabe 1.17 Zeigen Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) &\longrightarrow 2^x(2y+1) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Aufgabe 1.18 Zeigen Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x,y) &\to \frac{1}{2}(x+y) \cdot (x+y+1) + x \end{aligned}$$

ist injektiv und surjektiv.

Aufgabe 1.19 Sie sollen Kaninchen, Hamster und Mäuse kaufen. Zusammen 12 Tiere. Sie haben DM 46,– zur Verfügung, die ausgegeben werden sollen. Kosten: Hamster DM 4,–, Maus DM 3,–, Kaninchen DM 10,–. Wie viele Hamster, Mäuse, Kaninchen müssen Sie kaufen?

Aufgabe 1.20 Am Tage X gibt es in der Mensa sog. Schnitzel. Es kann Gemüse und als Nachtisch Quark dazugekauft werden. Eine Befragung von 154 Menschen ergab:

a) 120 aßen “Schnitzel”

b) 125 aßen Gemüse

c) 97 leisteten sich einen Nachtisch

d) 115 aßen Schnitzel und Gemüse

e) 90 aßen alles: Schnitzel, Gemüse und Nachtisch

f) 5 Magenkranke aßen nur den Quark

g) Alle, die Nachtisch und Gemüse aßen, aßen auch “Fleisch”.

   Fragen:

   1. Wie viele der 154 aßen in der Mensa?
   2. Wie viele waren reine Vegetarier (bei dieser Mahlzeit)?
   3. Wie viele aßen nur Beilagen?

Aufgabe 1.21 Zeichnen Sie die Teilmenge der Ebene, die durch die Ungleichungen:

$$\begin{array}{rcrcr} 18x & + & 3y & \geq & 54 \\ 3x & + & 12y & \geq & 36 \\ 4x & + & 2y & \geq & 20 \\ x & \geq & 0 & & \\ y & \geq & 0 & & \end{array}$$

gegeben ist

Aufgabe 1.22 . Es seien A_1, A_2, A_3, A_4 die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcll} A_1 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \; y \geq x\} \\ A_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \; y \geq -x\} \\ A_3 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \; y \leq x+2\} \\ A_4 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \; y \leq -x+2\}. \end{array}$$

Zeichnen Sie:

a) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

b) $(A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4)$

c) $(A_1 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4)$

Aufgabe 1.23 Es bezeichne $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.
Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x \geq 0 \wedge y \leq 2x\}$
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x \leq 3 \wedge y \geq 0\}$

b) $A \cap B;\ A - B;\ B - A$

Aufgabe 1.24 Es seien

$$\begin{array}{rcll} A_1 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \ y \geq -x + 5\} \\ A_2 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \ y \geq 2x - 10\} \\ A_3 & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & \mid \ y \leq \frac{7}{8}x + \frac{10}{8}\} \end{array}$$

a) Zeichnen Sie $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

b) Für $c \in \mathbb{R}$ sei $B_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 6y = c\}$.
Zeichnen Sie B_0, B_2, B_7 und B_{10}.

c) Berechnen Sie $S = \{c \in \mathbb{R} \mid B_c \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \emptyset\}$.

Aufgabe 1.25 a) Zeichnen Sie die Funktionen

$$\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & |x+2| - |x-2| \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & |-5| + |5-x| - 1 \end{array}$$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$|x+2| - |x-2| = |x-5| + |6-x| - 1$$

Aufgabe 1.26 Rechnen Sie nach:

$$\{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4x - 21 > 0\} = \{x \in \mathbb{R};\ x < (-3)\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ x > 7\}.$$

Aufgabe 1.27 Seien $a, b, x \in \mathbb{R},\ a, b > 0$.
Zeigen Sie: $(a < 4 - a^2 < 4) \wedge (0 < b^2 - 4 < x) \Rightarrow 0 < b - a < x$.

Aufgabe 1.28 Gegeben sei $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. $x_1 = 1$ ist eine Nullstelle von f.

a) Man berechne die weiteren Nullstellen von f.

b) Man bestimmea, b, c mit $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$.

Aufgabe 1.29 Berechnen Sie die Nullstellen der nachfolgenden Polynome:

a) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 15x - 18$

b) $g(x) = 24x^3 + 10x^2 - 3x - 1$

Ist q eine ganze Zahl, so daß $\frac{1}{q}$ eine Nullstelle von $g(x)$ ist, dann ist 24 ein ganzzahliges Vielfaches von q.

Aufgabe 1.30 Vereinfachen Sie die nachfolgenden Ausdrücke (Fallunterscheidung!):

a) $\frac{1}{2}(x + y + |x - y|); \quad x, y \in \mathbb{R}$

b) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1}; \quad x \neq -1$

c) $\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 3x + 2}; \quad x \neq 1, 2$

d) Teilen Sie $x^4 - 6x^3 + 2x^2 + x - 1$ mit Rest durch $x^2 + 4x + 3$.

Aufgabe 1.31 Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{42}x + \frac{1}{21} = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{3}{2}) - \frac{8}{27} + \frac{4}{49}$$

Angabe der Lösung in rationalen Zahlen.

Aufgabe 1.32 Sei $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Bestimmen Sie alle Funktionen $f : A \to A$.

b) Sei $f : A \to A$ gegeben durch $f(1) = 2$; $f(2) = 3$; $f(3) = 1$.

Berechnen Sie $f \circ f$, $f \circ (f \circ f)$ und $f \circ (f \circ (f \circ f))$.

Aufgabe 1.33 Sie stellen ein Waschpulver her, daß Sie unter den Handelsmarken Reini, Weiso und Bunta verkaufen. Bei einem Waschtest waren 3000 Kunden mit wenigstens einem Waschmittel zufrieden.

550 Testteilnehmer priesen die Weißkraft von wenigstens zwei Waschmitteln. Mit "gut" wurden 1030 mal Reini und 1351 mal Bunta bewertet. Die Anzahl der Tester, die Reini und Weiso für gut hielten, betrug ein Drittel der Anzahl derer, denen nur Bunta und Weiso zusagte. 780 mal fand nur Reini Gnade. 99 Tester fanden nur Reini und Weiso gut.

a) Wieviel Testpersonen stellten fest, daß die Wirkung ihres (guten) Waschmittels nicht von der Verpackung abhängt?

b) Wie viele fanden Weiso gut?

c) Wie viele hielten nur Reini und Bunta für brauchbar?

Aufgabe 1.34 In einem Laden werden Hüte, Regenumhänge und Schirme verkauft. Bei einem Sonderverkauf kann jeder Kunde höchstens je einen Hut, einen Umhang und einen Schirm erwerben. Nach einem Tag stellen Sie fest, daß 206 Kunden wenigstens einen Artikel gekauft haben; 100 Kunden haben wenigstens 2 Artikel und 50 Kunden die Höchstmenge gekauft. Es wurden 150 Schirme und 130 Umhänge verkauft. Die Anzahl der Kunden, die Umhänge und Schirme gekauft haben, ist genauso groß, wie die Anzahl der Kunden, die sich für Umhänge und Hüte erwärmten.

Dreißig mal wurde nur der Umhang verkauft.

a) Wie viele Kunden kauften Umhänge und Schirme?

b) Wie viele Kunden kauften Schirme und Hüte?

c) Wie viele Kunden kauften nur Hüte?

d) Wie viele Kunden kauften nur Schirme?

Aufgabe 1.35 In einer Großküche werden Essen bestehend aus Hauptkomponente, Beilage und Dessert ausgegeben. Bei einer Nachfrage bezeichneten 2900 Essensteilnehmer wenigstens eine Komponente als gelungen, 980 Befragten schmeckten wenigstens zwei Teile und 30 Leuten hatte alles gemundet. Als "gut" wurde 1060 mal die Beilage und 2020 mal der Nachtisch genannt. Die Anzahl der Esser, denen Beilage und Nachtisch schmeckte, war genauso groß, wie die Anzahl derer, die Beilage und Hauptkomponente mit Appetit verzehrten. Eintausendfünfhundertmal fand nur der Nachtisch Gnade.

a) Wie oft wurden Beilage und Nachtisch positiv beurteilt?

b) Wie oft Nachtisch und Hauptkomponente?

c) Wie oft nur die Hauptkomponente?

d) Wie oft nur die Beilage?

Aufgabe 1.36 In der Mensa werden Erbsen, Pommes frites und Quark als Beilagen angeboten. Sie haben folgende Informationen:

> 90 Studenten essen mindestens zwei der Beilagen.
>
> 60 Studenten essen genau zwei der Beilagen.
>
> Die Anzahl der Studenten, die nur Pommes frites essen, ist dreimal so groß wie die Anzahl derer, die alle drei Beilagen essen.
>
> Die Anzahl der Studenten, die nur Erbsen und Pommes frites essen, ist dreimal so groß wie die Anzahl derer, die nur Pommes frites und Quark essen.
>
> 160 Studenten essen Pommes frites.
>
> 90 Studenten essen Erbsen.
>
> 250 Studenten essen mindestens eine Beilage.

a) Wie viele Studenten essen alle drei Beilagen?

b) Wie viele Studenten essen nur Quark, nur Erbsen, nur Pommes frites?

c) Wie viele Studenten essen Quark und Erbsen?

d) Wie viele Studenten essen Quark?

Aufgabe 1.37 Geben Sie Polynome von möglichst kleinem Grad an, deren Graph durch folgende Punkte läuft:

a) $(-2, 5)$, $(-1, 2)$, $(0, -1)$, $(1, 2)$

b) $(-2, 15)$, $(-1, 6)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$

c) $(1, 9)$, $(2, 11)$, $(3, 19)$, $(4, 25)$, $(5, 53)$

Kapitel 2

Ungleichungen

Aufgabe 2.1 Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

a) $|x+3| + |x-| \leq 10$

b) $|x| + |y| > 1$

c) $|x-a| + |y-2| \leq 3.$

Aufgabe 2.2 Bestimmen Sie Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $|x-2| + 2x + |3x+6| \leq x^2 + 2x + 4$

b) $\max(x-4, x^2+6x) \leq 4x$

Hierbei bedeutet: $\max(a,b) = \begin{cases} a, & a \geq b \\ b, & b \geq a \end{cases}$

c) $|x+3| + 6x \leq 9x^2 + 6x - 8$

d) $\dfrac{9x}{x^2-x-6} \leq \dfrac{4x+3}{x^2+x-2}$ $x \neq -2, 3, 1$

e) $6x + 4 \leq \dfrac{6x-9}{3x+18},\ x \neq -6$

f) $|5x| + 2 \geq 25x^2 + 20 + 1$

g) $\frac{3x-7}{2x+9} \le -4$

h) $\frac{|x^2+4x-12|}{x+3} > \frac{1}{2}x + 10;\ x \neq -3$

i) $4x+3 \le \frac{2x+6}{|3x+9|};\ x \neq -3$

j) $\frac{x-3}{x-9} \le \frac{4x-16}{x^2-3x-54};\ x \neq -6, 9$

k) $\frac{x^2-x-12}{x-4} < \frac{x^2+6x+4}{x+1};\ x \neq 4, -1$

l) $\frac{|x^2-36|}{x+6} > |x+3| - 12x;\ x \neq -6$

m) $\frac{17x+1}{x^2-2x-3} > \frac{16x+1}{6x^2-6x-12};\ x \neq 2, 3, -1$

n) $7x+9 \le 4x^2 - x - 3$

o) $\frac{x+2}{x+9} > \frac{2-5x}{x^2+5x-36},\ x \in \mathbb{R} - \{-9, 4\}$

p) $\frac{3x^2+9x+6}{x^2-4} > \frac{2x}{x-2};\ x \neq -2, 2$

q) $\frac{7x^2+28x+21}{x^2+2x-8} > \frac{7x^2+7x}{x+4};\ x \neq -4, 2$

r) $\frac{(x-3)(x+4)}{x^2+2} \le \frac{|x-1|(x+1)(x-3)}{(x^2-1)(x^2+2)};\ x \neq -1, 1$

s) $|x-1| + x^2 \le |2x+5| + 4x$

t) $\frac{(x-1)(x+2)|x-2|}{|x-1|(x^2+1)} < \frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x^2+1)}$

u) $3x+2 \le \frac{2x-3}{x+6};\ x \neq -6$

v) $|x| + 2 \ge x^2 + 4x + 1$

w) $\dfrac{|x+2|}{x+3} \leq \dfrac{x^2+3x+2}{|x+1|};\ x \neq -3, -1$

x) $\dfrac{x^2+5x+6}{x^3-4x^2-4x+16} \leq \dfrac{x+3}{x^2+x-6};\ x \neq -3, -2, 2, 4$

y) $\dfrac{|x^2+x-2|}{x^3+4x^2+x-6} \leq \left|\dfrac{x^3+6x^2+6x-8}{x^3+6x^2+5x-12} - 1\right|;\ x \neq -4, -3, -2, 1$

z) $\dfrac{(x^2+1)(x-1)|x-3|}{(x^2+4)(x-3)} \leq \dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^2+4)}$

Aufgabe 2.3 Bestimmen sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden drei Ungleichungen alle erfüllt sind:

$$3x+4 \geq 6; \quad 2x+1 \geq 3x; \quad x+7 \geq 2+2x$$

Aufgabe 2.4 Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für welche die folgenden Ungleichungen beide erfüllt sind:

$$3x^2 + \sqrt{12}x + 10 \geq 12; \quad |x+2| \geq 3$$

Aufgabe 2.5 Bestimmen sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen

a) $\max\{1+x, 1-2x\} \leq 3 - x^2$

b) $x^3 + \max(x^2+x, 2) \geq -x.$

c) $10^{2x+3} \cdot 100^x > 10^{3x-1}$

d) $0,5^{x-1} \cdot 0,25^{x+1} < 0,0625^{3x-2}$

e) $\dfrac{x^2+2x+4}{|x^3-4x^2-8x-24|} \leq \min(x, 7), x \neq 6$

Aufgabe 2.6 Es seien M, N folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & | \quad y+3-x^2 \geq 0\} \\ N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 & | \quad 2-y-x^2 \geq 0\} \end{array}$$

Skizzieren sie $M \cap N, M - N$ und $\mathbb{R}^2 - (M \cup N)$.

Aufgabe 2.7 Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, a_n > 0. \end{aligned}$$

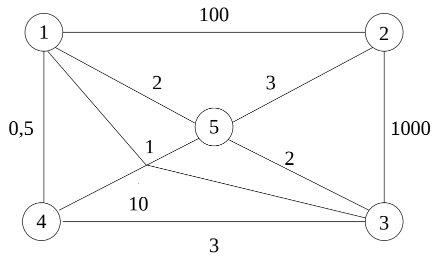
Sei $K \in \mathbb{R}, K > 0$. Geben Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ an, so daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq x_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \geq K.$$

Kapitel 3

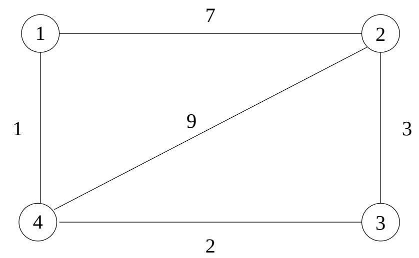
Graphen

Aufgabe 3.1 Bestimmen Sie die kürzesten Wegen von 1 zu allen übrigen Knoten.

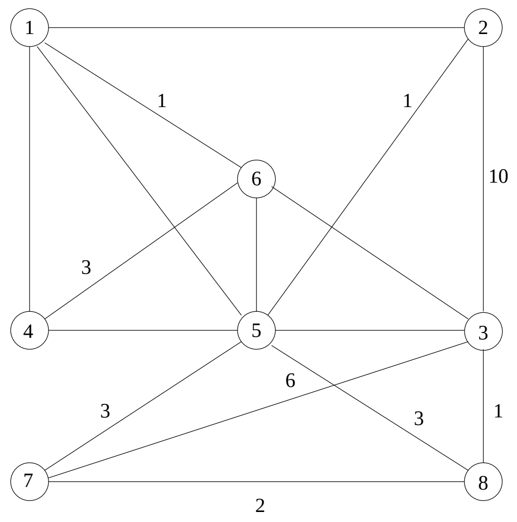


Aufgabe 3.2 Bestimmen Sie die kürzesten Entfernungen zwischen allen Knoten:

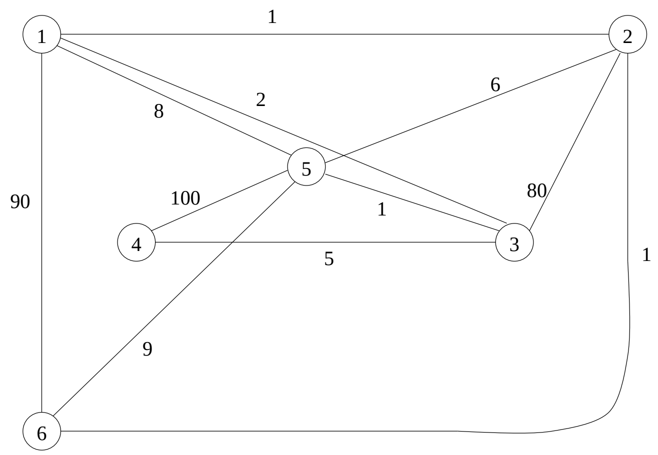
a)



b)



Aufgabe 3.3 Gegeben sei das folgende Straßennetz mit Kilometerangaben:



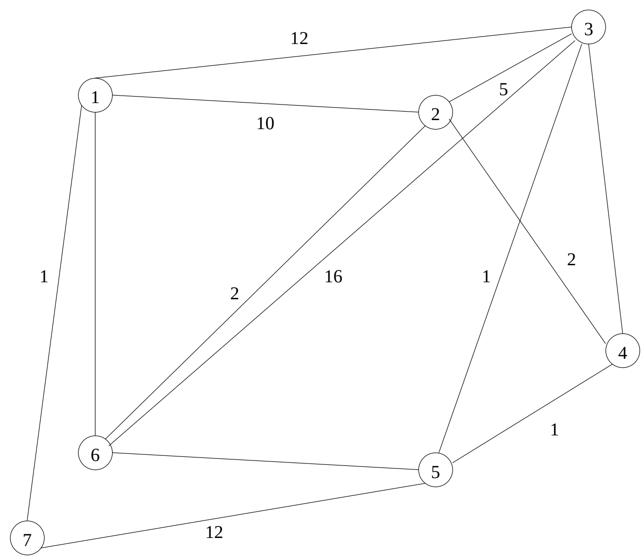
Bestimmen Sie die kürzesten Entfernungen zwischen allen Punkten, wenn die Straße (1,2) nur in Richtung 2 befahren werden darf.

Aufgabe 3.4 Gegeben sei die folgende Tabelle kürzester Entfernungen: (Angabe in Kosten für Transport einer Einheit)

nach / von	1	2	3	4	5	6
1	0	1	9	4	3	5
2	4	0	8	3	2	4
3	6	2	0	5	4	4
4	1	3	5	0	5	1
5	2	4	7	1	0	3
6	6	2	4	5	4	0

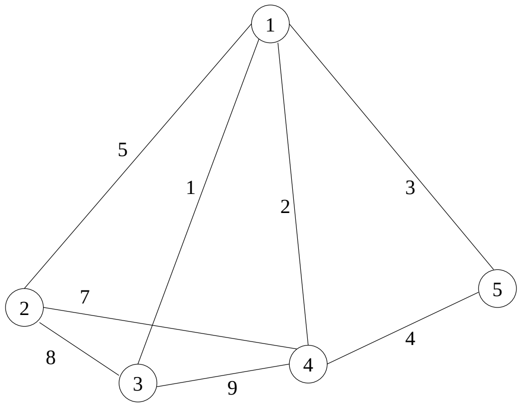
Alle Orte werden mit gleichen Mengen versorgt oder entsorgt. Man bestimme die günstigsten Standorte für einen Versorgungs- und einen Entsorgungsbetrieb.

Aufgabe 3.5 Bestimmen Sie die kürzesten Wege von Knoten 3 zu allen anderen Knoten:

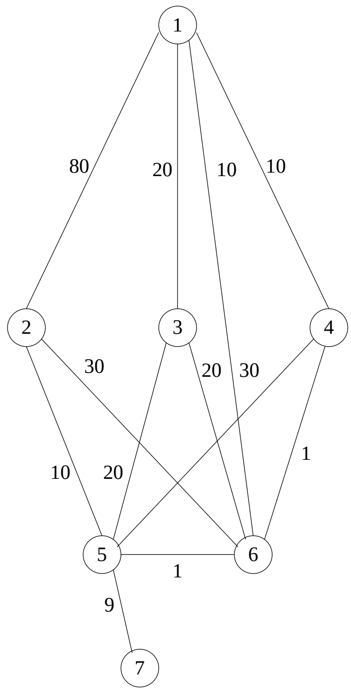


Aufgabe 3.6 Bestimmen sie die kürzesten Entfernungen zwischen allen Knoten:

a)



b)



Kapitel 4

Induktion

Aufgabe 4.1 Zeigen Sie durch Induktion:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2 + 3i + 2} = \frac{n}{2n+4}$

b) $9(\frac{3}{4})^n + 21(\frac{1}{4})^n < \frac{1}{5}$ für $n \geq 14$

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \geq 0$ und $a \geq 0$:

$$(1+a)^n \geq 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^3.$$

Aufgabe 4.2 Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n_0, so daß $2^n > n^2 + n$ für jedes $n \geq n_0$.

a) Zeigen Sie: $(1+x)^n \geq 1 + nx$ falls $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq -1$ und $n \in \mathbb{R}$

b) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{k}(2n+1)$

Aufgabe 4.3 Rechnen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion nach:

a) $\sum_{i=0}^{n} a = (n+1)a,\ a \in \mathbb{R}.$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$.

c) $\displaystyle\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{i=0}^{n} x^i,\ x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

d) $\displaystyle\frac{1}{n^3}\left(\sum_{i=1}^{n}(3i^2 - 3i + 1)\right) = 1$.

Aufgabe 4.4 a) Entwickeln Sie eine Formel für $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$ und beweisen Sie diese induktiv!

b) Verfahren Sie entsprechend für $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$

c) Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ für $n \in \mathbb{N}$.

d) Zeigen Sie: Für $m \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + P(n)$, wobei $P(n) = \displaystyle\sum_{s=0}^{m} a_s n^s$ mit $a_s \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 4.5 Beweisen Sie den allgemeinen Lehrsatz von Binomi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}.$$

Aufgabe 4.6 a) Wieviele Möglichkeiten gibt es in einer n-elementigen Menge k- elementige Teilmengen auszuwählen?

b) Wieviele Teilmengen besitzt eine n-elementige Menge überhaupt?

Formulieren Sie a,b zunächst als Induktionsproblem.

Aufgabe 4.7 Wieviele k-Tupel ohne Wiederholung können Sie aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bilden?

Aufgabe 4.8 i) Zeigen Sie: Die Anzahl der bijektiven Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}$ in sich ist $n!$

ii) Wieviele k-Tupel von natürlichen Zahlen können Sie aus der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bilden?

iii) Sei $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Mit f^n sei die n-fache Verknüpfung $f \circ f \circ \ldots \circ f$ von f mit sich selbst bezeichnet.

Zeigen Sie: Für jedes $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots n\}$, das bijektiv ist, gibt es eine positive natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, so daß $f^k(x) = x$ für alle $x \in \{1, \ldots, n\}$.

Aufgabe 4.9 Zeigen Sie

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$, falls $a \neq b$.

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$.

Aufgabe 4.10 a) Rechnen Sie nach, daß

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } 1 \leq k \leq n.$$

b) Rechnen Sie mit der Methode der vollständigen Induktion nach:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Aufgabe 4.11 Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n_0, so daß

$$2^n > n^2 + n, \text{ für jedes } n \geq n_0.$$

Aufgabe 4.12 Bestimmen Sie eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\frac{10}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{(-1)^n}{4n^2} < \frac{1}{20} \text{ für } n \geq n_0$$

Kapitel 5

Endliche Summen

Aufgabe 5.1 Berechnen Sie

$$\text{a)} \sum_{i=0}^{4} (\frac{1}{2})^i \qquad \text{b)} \sum_{i=7}^{719} (\frac{3}{4})^i \qquad \text{c)} \sum_{i=0}^{50} 5 \cdot (\frac{1}{2})^i \qquad \text{d)} \sum_{i=6}^{719} (\frac{7}{8})^i$$

Aufgabe 5.2 Berechnen Sie

$$\sum_{k=4}^{719} \frac{k-3}{k^3 - 7k - 6}.$$

Sie können benutzen:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+2)}.$$

Aufgabe 5.3 a) Rechnen Sie nach, daß für $x \in \mathbb{R} - \{+1, -1\}$ die Gleichung:

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

gilt.

b) Berechnen Sie

$$\sum_{i=2}^{719} \frac{1}{i^2 - 1}.$$

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie

a) $\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{3}{i^2+i-2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

Berechnen Sie

b) $\sum\limits_{i=17}^{329} \frac{9}{i^2+i-2}$ c) $\sum\limits_{2}^{1986} \frac{8}{i^2+5i+6}$ d) $\sum\limits_{i=3}^{719} \frac{7}{i^2-i-2}$

e) $\sum\limits_{i=7}^{308} \frac{27}{i^2-11i+30}$ f) $\sum\limits_{i=3}^{98} \left(\frac{i^2+4i}{i^2+4i+3}\right)$ g) $\sum\limits_{k=0}^{49} \frac{1}{k^2+3k+2}$

h) $\sum\limits_{i=7}^{70} \frac{i-3}{i^3-7i-6}$ i) $\sum\limits_{i=3}^{913} \frac{7}{i^2+2i}$ j) $\sum\limits_{i=0}^{913} \frac{i^3+3i^2+2i+5}{i^2+3i+2}$

k) $\sum\limits_{i=90}^{822} \frac{4}{3i^2+24i+45}$ l) $\sum\limits_{i=1}^{1017} \frac{8}{7i^2+21i+14}$

Aufgabe 5.5 Berechnen Sie:

a) $\sum\limits_{i=0}^{723}(i+7)^2$ b) $\sum\limits_{i=0}^{83} i(i+1)(i+2)$ c) $\sum\limits_{i=9}^{49}(4i^2+2i-6)$

d) $\sum\limits_{i=47}^{713}(3i)$ e) $\sum\limits_{i=0}^{713}(7i+3)$ f) $\sum\limits_{i=6}^{723}(5i^2+2i+3)$

Geben Sie die Rechenschritte und eventuell benutzte Formeln an.

g) Zeigen Sie, daß für beliebiges $n \in \mathbb{B}_0$ gilt:

$$(n+1)^4 = \sum_{i=0}^{n}((i+1)^4 - i^4) = \sum_{i=0}^{n}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1).$$

Nutzen Sie diese Erkenntnis zur Berechnung von $\sum\limits_{i=8}^{71} i^3$.

Aufgabe 5.6 Berechnen Sie

$$\text{a)} \quad \sum_{i=1}^{97} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+9} \qquad \text{b)} \quad \sum_{m=0}^{16} \binom{17}{m} (-1)^m$$

Kapitel 6

Folgen

Aufgabe 6.1 Untersuchen Sie auf Konvergenz und geben Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert an:

a) $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{(n+2)^2}$ b) $a_n = (\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2})$

c) $a_n = \dfrac{3n^3-2n^2+7}{5n^2+2n+1}$ d) $a_n = \dfrac{2n^2+1}{3n^2+n-1}$ e) $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \dfrac{3}{4^k}$

f) $a_n = \dfrac{n^2+2n+3}{n^2}$ g) $a_n = \dfrac{3n^3+4n^2+1}{n(n+1)}$ h) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3 + n^2 + \frac{1}{6}n}{n^3+2n+\frac{1}{n}}$

Aufgabe 6.2 a) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*$$

b) Sei $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $a_k = \sum\limits_{n=1}^{k} \dfrac{1}{n(n+1)}$

Zeigen Sie: Die Folge $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Bestimmen Sie den Grenzwert.

c) Zeigen Sie, daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergiert.

Aufgabe 6.3 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge.
Zeigen Sie:$\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 6.4 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$.
Sei $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge: $b_n = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a.

Aufgabe 6.5 Es sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.
Rechnen Sie nach:

a) $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Zeigen Sie:

c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert

d) Berechnen Sie den Grenzwert.

e) Untersuchen Sie die Folgen $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_0 = a,\ a \in [-2, 2]$ und $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$.

f) Was ändert sich in e) bei Startwert $b_0 \in]2, +\infty[$.

Aufgabe 6.6 Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge, die gegeben ist durch:

$$a_0 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$$

Zeigen Sie:

a) $a_n > a_{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$

b) $a_n < \dfrac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie auch den Grenzwert.

Aufgabe 6.7 Berechnen Sie

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$;

Hinweis: $\frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$)

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n^2+10n+24)}$

d) $\sum\limits_{i=8}^{\infty} \frac{13}{i^2+5i+6}$

e) $\sum\limits_{i=7}^{\infty} \frac{27}{i^2-11i+30}$

Aufgabe 6.8 Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{7}{3^k})$ auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 6.9 Achilles läuft doppelt so schnell wie Sie selbst. Sie sind 100 m von Achilles entfernt.

Behauptung: Achilles kann Sie **nie** einholen.

Beweis: Wenn Achilles dahin gekommen ist wo Sie vorher waren, sind Sie **stets** schon ein Stück weiter weggelaufen.

Aufgabe 6.10 a) Zeigen Sie

$$\sum_{n=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

b) Zeigen Sie: Die Folge

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{divergiert.}$$

Hinweis zu b): Benutzen Sie Teil a).

Aufgabe 6.11 Berechnen Sie:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - 7n^2 + 9n - 2}{4n^3 + 8n^2 - 4n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - 9n + 17}{n^4 - n^2 + 18n - 1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2}$

Aufgabe 6.12 Zeigen Sie:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \cdot a^k$ mit $\mid a \mid < 1$ konvergiert,

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k^2}{3^k}$ konvergiert,

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{k+1}{k^2+2}$ divergiert.

Aufgabe 6.13 Untersuchen Sie auf Konvergenz und bestimmen Sie den Summenwert:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{6}{8^k}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{5}{7^k}$ c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{3^k}{4^k}$

Aufgabe 6.14 Zeigen Sie:

Für $-1 < x < 1$ konvergiert die Reihe: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Aufgabe 6.15 Sie nehmen am 1.1.85 einen Kredit in Höhe von 100 000,- DM auf. Ab dem 1.1.86 zahlen Sie jeweils zu Jahresanfang bis zur Tilgung einen festen Betrag A zurück. Die Restschuld wird mit 5% verzinst.

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von A die Folge S_n.

b) Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (falls er existiert) für $A = 4000$ DM, 5000 DM, 6000 DM.

Aufgabe 6.16 Es sei $b_0 = 179$, $a > 0$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge $b_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} + \frac{a}{b_{n-1}})$ für $n \geq 1$.
Zeigen Sie:

a) $\sqrt{a} \geq b_n$ für $n \geq 1$

b) $b_n \geq b_{n-1}$ für $n \geq 2$

c) $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.
Hinweis zu a): Zeigen Sie zuerst $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6.17 Untersuchen Sie die Folge $a_n = d^n \cos(\frac{n\pi}{2})$ auf die Existenz eines Grenzwertes für $d = \frac{1}{2}$, 1, 2. Bestimmen Sie auch den Grenzwert, falls er existiert.

Aufgabe 6.18 Sei

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right) - x. \end{array}$$

(Sinus im Bogenmaß!)

a) Zeigen Sie: Die einzigen Nullstellen von f sind 0 und $\frac{\pi}{4}$.
(Hinweis: Monotoniebetrachtung!)
Sei $a_{n+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin a_n$ für $n \geq 0$ und $a_0 = \frac{1}{10}$.

b) Zeigen Sie: $0 \leq a_n \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ für $n \geq 0$.

c) Zeigen Sie: $a_{n+1} > a_n$ für $n \geq 0$.

d) Zeigen Sie: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.

Kapitel 7

Differenzengleichungen erster Ordnung

Aufgabe 7.1 Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Lösung der Differenzengleichung: $F(x) = ax + b$, so gilt:

$$X_n = A \cdot (a^n) + \frac{b}{1-a} \text{ für ein } A \in \mathbb{R},$$

falls $a \neq 1$.

Aufgabe 7.2 Bestimmen Sie die Lösungsfolgen der nachstehenden Differenzengleichungen zu den gegebenen Anfangswerten. Berechnen Sie (sofern möglich) die Werte a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40}, und a_{50} und tragen Sie diese in ein Schaubild ein.

$$\begin{array}{llcll} \text{a)} & a_{n+1} & = & 1,01a_n + 10, & a_0 = 0 \\ \text{b)} & a_{n+1} & = & -a_n + 3, & a_0 = 4 \\ \text{c)} & a_{n+1} & = & (-0,9)a_n + 2 & a_0 = 10. \end{array}$$

Aufgabe 7.3 Sie besitzen ein Sparkonto. Zum 1.1. eines jeden Jahres zahlen Sie 200,– DM ein. Sie erhalten einen Jahreszins von 4%. Es bezeichne K_n den Kontostand an 1.1. des Jahres n. Es gilt dann:

$$K_n = K_{n-1} \cdot (1,04) + 200; \; n \geq 1 \text{ und } K_0 = 200.$$

Bestimmen Sie K_{37}.

Aufgabe 7.4 Es sei K_n die Anzahl der Güter, die Sie im Jahre n für eine DM kaufen können.

Der jährliche Kaufkraftverlust betrage 5%,

$$K_n = K_{n-1} \cdot 0,95.$$

Andererseits erhalten Sie jährlich 5,1% Gehaltserhöhung.

Wie viele Güter können Sie im Jahre 50 kaufen, wenn Sie im Jahre 0 eine Menge von 700 Stück erwerben können?

Aufgabe 7.5 In einer Wirtschaft gelte für die Produktivität p_n im Jahre $n \geq 0$

$$p_{n+1} = (0,8)p_n + 2, \; p_0 = 1$$

und für die Gesamtproduktion

$$P_{n+1} = (0,9)P_n + \frac{1}{2}, \; P_0 = 1.$$

Es gilt $P_n = p_n \cdot B_n$, wobei B_n die Anzahl der Beschäftigten (Einheit 10 000 000) im Jahre n ist.

a) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim p_n$, $\lim P_n$, $\lim B_n$.

b) Geben Sie B_1, B_3, B_5, B_{10} und B_{20} an.

Aufgabe 7.6 Bei der Herstellung und Vermarktung eines Guts gehen Sie von folgenden Grundannahmen aus: Sofern das Angebot eine Schwelle A nicht überschreitet, können Sie alle angebotenen Produkte absetzen; allerdings nicht zu konstanten Preisen. Wird mit A_t das Angebot im Zeitraum t bezeichnet, so wird im einfachsten Fall $A_t = A - ap_t$ angenommen, wobei p_t der Preis pro Einheit t ist.

Sie müssen aus technischen Gründen eine Mindestzahl B Ihres Guts herstellen.

Insgesamt produzieren Sie nach den Erfahrungen des Vorzeitraums, d.h.:

$$A_t = B + bp_{t-1}. \text{ (einfachste Situation!).}$$

$$\begin{array}{llrl} \text{Nun seien} & A & = & 10.000 \\ & B & = & 1.000 \\ & b & = & 0,002 \\ & p_0 & = & 1.000.000 \\ \text{und} & p_1 & = & 2.000.000 \end{array}$$

Berechnen Sie die Konstante a und p_{10}.

Aufgabe 7.7 Es sei K_n die Anzahl der Güter, die Sie im Jahre n für eine Mark kaufen können. Durch einen jährlichen Kaufkraftschwund von $p_1\%$ gilt

$$K_n = K_{n-1}\left(1 - \frac{p_1}{100}\right), \; K_0 = 1.$$

Um diesem Kaufkraftschwund entgegenzuwirken, erhalten Sie einen jährlichen "Inflationsbonus" von $p_2\%$, d.h. Ihr Gehalt G_n im Jahre n genügt der Formel

$$G_n = G_{n-1}\left(1 + \frac{p_2}{100}\right), \; G_0 = 1000.$$

1) Wie viele Güter können Sie für Ihr Gehalt im Jahre $n = 20$ kaufen, wenn $p_1 = p_2 = 3$?

2) Wie groß muß p_2 sein, damit Sie im Jahre n gleichviele Güter wie im Jahre 0 kaufen können, falls $p_1 = 3\%$?

Aufgabe 7.8 a) Ein Betrieb benötigt für seine Produktion eine Maschine im Wert von DM 30.000,–, deren Lebenszeit 6 Jahre beträgt. Sie stehen vor der Wahl diese Maschine mit einem Kredit zum Zinsfuß von 8,4% und einer Laufzeit von 6 Jahren zu bezahlen, - der Kredit ist bei gleichbleibender Annuität **vorschüssig** zu bezahlen - oder die Maschine über einen Leasingvertrag zu leihen.

Die Leihgebühr von DM 7.600,– ist jeweils zum Jahresbeginn zu zahlen.

Wie entscheiden Sie sich? Begründen Sie die Antwort!

(Beachten Sie, daß die ersten Zahlungen zu Beginn der Laufzeit und die letzten Zahlungen zu Beginn des 6-ten Jahres erfolgen).

b) Ein Betrieb benötigt für seine Produktion eine Maschine im Wert von 30.000,–, deren Lebenszeit 7 Jahre beträgt. Sie stehen vor der Wahl, dieses Gerät mit einem Kredit von 7,5% und einer Laufzeit von 7 Jahren zu bezahlen (Raten in jeweils gleicher Höhe sind viermal jährlich zum 1.2., 1.5., 1.8 und 1.11. zu leisten), oder die Maschine zu einer Leihgebühr von 5.400,–, die jeweils zum 1.1. fällig wird, zu leihen. Wie entscheiden Sie sich, wenn Sie freies Kapital - mit der Möglichkeit der dauernden Verfügbarkeit - zu 6% Jahreszinsen anlegen können?

Aufgabe 7.9 Sie züchten Meerschweinchen. Die Population in der n-ten Zeitperiode hängt von dem Futterüberschuß F_{n-1} in der $n-1$-ten Zeitperiode ab. Es gilt für die Population der n-ten Periode $P_n = 10 \cdot F_{n-1}$. Der Futterüberschuß genüge der Formel

$$F_n = 200 - \frac{1}{20} p_n.$$

Ermitteln Sie p_n explizit, untersuchen Sie auf Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.10 Sie stellen ein Produkt her. Es können beliebige reellpositive Quantitäten produziert werden.

Die Nachfrage N_n im n-ten Rechnungszeitraum soll linear vom Preis p_n im n-ten Zeitraum für eine Einheit abhängen.

$$N_n = A - ap_n;\ A, a > 0.$$

Ihr Angebot A_n richten Sie linear nach dem Preis im vorangegangenen Zeitraum ein

$$A_n = B + bp_{n-1};\ B, b > 0.$$

Nehmen Sie den günstigen Fall

$$N_n = A_n$$

an und bestimmen Sie bei gegebenem $p_0 > 0$ die Folgen p_n und A_n explizit in Abhängigkeit von A, a, B, b. Diskutieren Sie das langfristige Verhalten der Lösungen.

Aufgabe 7.11 Von zwei Geldinstituten A und B wird Ihnen eine Hypothek über 80.000,– DM mit Tilgungsaussetzung angeboten. A verlangt bei einem Disagio von 6% einen Nominalzins von 6,25%, B bei einem Disagio von 8% einen Nominalzins von 6%.

Bei welcher Finanzierung erreichen Sie eine geringere Effektivverzinsung?
Die Laufzeit beträgt 10 Jahre.

Aufgabe 7.12 Für eine Folge a_n gelte

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 6 \text{ für } n \leq 9 \text{ und } a_{n+1} = 8a_n - 2 \text{ für } n \geq 10.$$

Ferner sei $a_0 = 9$.
Bestimmen Sie die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ explizit.

Kapitel 8

Elementare Finanzmathematik

Aufgabe 8.1 Sie erhalten zu Beginn des Jahres 0 den Kredit K. Beginnend mit Jahr 1 zahlen Sie jeweils zu Jahresbeginn A Mark zurück. Die im Jahre n bestehende Restschuld S_n wird am Ende eines jeden Jahres mit $p\%$ verzinst.

1) Stellen Sie eine Differenzengleichung für S_n auf und geben Sie die Lösung an.

2) Sei $K = 100000,\ p = 6\%$ und $S_{20} = 0$.

   Wie groß ist A?

Aufgabe 8.2 Sie legen ein Kapital K an, das jeden Monat um $\frac{p}{12}\%$ verzinst wird. Sei K_n das Kapital zu Beginn des Jahres $n(n \geq 0)$.

1) Stellen Sie eine Differenzengleichung für K_n auf und geben Sie die Lösung an.

2) Sei p_{eff} der Effektivzins.

   Zeigen Sie:
   $$p_{eff} > p$$

Aufgabe 8.3 Sie schließen einen Bausparvertrag ab und zahlen am Ende eines jeden Monats 400,– DM auf das Bausparkonto ein. Am Ende eines jeden Jahres wird Ihnen eine Prämie von 240,– DM gutgeschrieben. Das angesparte Kapital wird jährlich zu 2,5% verzinst. Es sei K_n das Kapital zu Beginn des Jahres $n, n \geq 0$.

1) Stellen Sie eine Differenzengleichung für K_n auf und geben Sie die Lösung an.

2) Sie stellen zum Juni des Jahres $n = 8$ Ihre Zahlungen ein. Wie hoch ist das angesammelte Kapital zum Beginn des Jahres $n = 9$? Eine Prämienzahlung erfolgt wegen der Zahlungseinstellung nicht mehr.

Aufgabe 8.4 Sie nehmen am 1.1.0 einen Kredit in Höhe von 148000,– DM auf. Wieviel müssen Sie zu Beginn eines jeden Monats zurückzahlen, wenn der Kredit nach 20 Jahren getilgt sein soll? Restschulden werden mit 22222222 Jahr verzinst. Die erste Rate wird von der Auszahlung einbehalten.

Aufgabe 8.5 Ihre Lebensversicherung wird fällig: 100 000,– DM. Wieviel können Sie am Ende eines jeden zweiten Monats abheben, wenn das Kapital nach 15 Jahren aufgezehrt sein soll? Restguthaben werden mit 5,5% verzinst (jährlich).

Aufgabe 8.6 Sie zahlen auf ein Konto am Ende eines jeden Monats 200,– DM ein. Der Jahreszinssatz beträgt $p = 5\%$.

In welchem Monat welchen Jahres können Sie Ihre Zahlungen einstellen, wenn Sie wenigstens 15000,– DM ansparen wollen? [Das Konto wird dann zum Jahresende aufgelöst.]

Aufgabe 8.7 Sie legen 5000,– DM am 1.1.0 fest an. Wie hoch muß der Zinssatz sein, damit Sie am 31.12.18 DM 20000,– abheben können?

Aufgabe 8.8 Ein Sparkonto habe einen Jahreszins von 8%. Am Ende eines jeden zweiten Monats zahlen Sie A DM ein.

Wie groß ist A, wenn am 1.1.20 genau 25000,– DM auf dem Konto stehen?

Hinweis: Beträge, die m-Monate ($1 \le m \le 12$) im Jahr auf dem Konto liegen, werden mit $\frac{m}{12} \cdot p$ Prozent verzinst. Startpunkt ist der 1.1.0.

Aufgabe 8.9 Sie zahlen 20 Jahre lang jeden Monatsersten 100,- DM auf ein Konto mit 8% Jahreszinsen ein. Ab dem 1.1.25 heben Sie am Ende eines jeden Monats 300,– DM ab.

Wie lange reicht das Kapital?

Aufgabe 8.10 Sie besitzen am 1.1.83 DM 7000,–, die Sie zu 6% anlegen. Nach 5 Jahren wollen Sie einen 5 Jahre alten Gebrauchtwagen kaufen, der am 1.1.83 einen Wert von 24000,- DM hat.

Wie groß muß der jährliche Wertverlust des Wagens sein, damit Ihre Ersparnisse ausreichen?

Aufgabe 8.11 Sie seien Eigner des Vermögens K_0. In jedem Monat verdienen Sie M Mark. Vom jeweils vorhandenen Vermögen verzehren Sie im Monat 90%. Ihr Gehalt wird am Monatsende erst überwiesen.

Wieviel Geld steht Ihnen im Dezember des Jahres 50 zur Verfügung?

Wächst im Laufe der Jahrhunderte Ihr Vermögen über alle Grenzen?

Aufgabe 8.12 Ein Bundesschatzbrief mit einer Laufzeit von 8 Jahren und einem Ausgabekurs von 98% wird im ersten Jahr mit 6,5% und in jedem weiteren Jahr um 0,5% höher als im Vorjahr verzinst. Zinsen einschließlich Zinseszinsen werden am Ende der Laufzeit ausgezahlt.

Wie hoch ist die Effektivverzinsung?

Aufgabe 8.13

a) Wie groß muß ein Kapital K zu Beginn von n Rentenperioden sein, um daraus bei einer Verzinsung von $p\%$ nachschüssig die Rente R zahlen zu können?

b) Sie seien Eigner des Kapitals $K = 300.000,--DM$, das Sie zum Jahreszins von 13 % anlegen. Am Ende eines jeden Jahres lassen Sie sich die Rente $R = 40.000,--DM$ auszahlen.

   Wie viele Jahre reicht Ihr Kapital?

Aufgabe 8.14 Sei seien Eigentümer eines Kapitals K, das Sie mit 12% Verzinsung (pro Jahr) anlegen. Am Ende eines jeden Jahres entnehmen Sie zum Inflationsausgleich 6% mehr als im Jahr zuvor. Erstmalig genehmigen Sie sich am Ende des ersten Jahres die Rente $K = 48.000,-DM$.

Sie können 50 Jahre auf diese Weise verleben. Verraten Sie (auf die Mark genau), wie hoch Ihr Kapital mindestens wäre.

Aufgabe 8.15 Am 31.12.83 verfügen Sie über DM 20.000,-. Sie schließen einen Bausparvertrag ab und zahlen am 31.12.83 und 1.1.87 jeweils DM 10.000,– ein, die Sie als Sonderausgaben steuerlich geltend machen. Dafür erhalten Sie am 30.9.84 und 30.9.85 Steuerrückzahlungen von jeweils 3000,-

DM, die Sie auf ein Bankkonto einzahlen. Am 1.1.94 können Sie über die Bausparbeiträge frei verfügen. Bei welchem Bankzinsfuß ist diese Form der Geldanlage einem Banksparbuch vorzuziehen, falls das Bausparguthaben mit 3% verzinst wird? Der Zinsfuß ist bis auf einen Fehler $< 2 \cdot 10^{-1}$ zu bestimmen.

Aufgabe 8.16 Vom 1.1.0 bis zum 31.12.19 zahlen Sie am Anfang eines jeden Monats 400,- DM auf ein Sparkonto ein. Die Verzinsung erfolgt jährlich und beträgt 7%.

a) Wie hoch ist Ihr Guthaben am 31.12.19?

b) Sie besitzen am 1.1.20 ein Kapital K_{20}.

   Welchen Betrag (in Abhängigkeit von K_{20}) können Sie ab dem 1.1.20 zu Beginn eines jeden Jahres abheben, wenn das angesparte Kapital mit der Entnahme am 1.1.40 aufgebraucht sein soll? [Restguthaben werden jährlich zu 7% verzinst.]

c) Welcher Betrag ergibt sich in b), wenn K_{20} das Guthaben aus Teil a) ist?

Aufgabe 8.17 Vom 1.1.0 bis zum 31.12.15 zahlen Sie am Anfang eines jeden Monats 200,– DM auf ein Sparkonto ein. Die Verzinsung erfolgt jährlich und beträgt 7,5%. Ab dem 1.1.20 heben Sie zu Beginn eines jeden Monats 300,– DM ab.

Geben Sie das Jahr und den Monat an, an dem Sie zum letzten Mal die vollen 300,– DM abheben können.

Aufgabe 8.18 Am 1.1.86 zahlen Sie von Ihrem gesparten BAFÖG 2000,– DM auf ein Sparkonto ein. Wie lautet Ihr Kontostand am 1.1.90, wenn Sie am 1.1.87/88/89 jeweils weitere 2000,– DM einzahlen und Ihnen jährlich 3,5% Zinsen gutgeschrieben werden?

Aufgabe 8.19 Sie zahlen jeweils zum 1.1. n, $n \geq 0$ DM 3000,- auf ein Konto ein, das einen Zins von 6,5% erbringt.

a) Wie lautet der Kontostand am 31.12.17?

b) Wie hoch ist der Betrag, den Sie am 1.1.0 auf einen Schlag hätten einzahlen müssen, um denselben Kontostand zum 31.12.17 zu erreichen?

Aufgabe 8.20 Am 1.1.0 beträgt das Guthaben auf Ihrem Sparkonto zu 3,5% Jahreszinsen DM 100.000,–.

Am Ende eines jeden nachfolgenden Jahres (d.h. erstmals am 31.12.1) heben Sie DM 5.000,– ab, (nachdem die Zinsen gutgeschrieben worden sind).

Wie lange können Sie dieses Verfahren beibehalten?

Aufgabe 8.21 Ab dem 1.1.0 legen Sie vierteljährlich DM 500,– zu einem Jahreszins von 4,5% fest an. Zum 1.1.16 werden die Zinsen auf 5% angehoben. Wie hoch ist der Kontostand am 31.12.39 (nach Zinsgutschrift)?

Aufgabe 8.22 Sie besitzen am 1.1.0 DM 40.000,–, die zu 3% Jahreszinsen angelegt sind.

Sie möchten am Ende jedes zweiten Monats (erstmals Ende Februar) einen Betrag K abheben, so daß die regelmäßigen Auszahlungen genau am 31.12.27 enden. Wie groß ist K?

Aufgabe 8.23 Sie besitzen am 1.1.0 DM 50.000,–, die auf einem Konto zu 4% Jahreszinsen angelegt werden. Am Ende eines jeden Monats (d.h. ab dem 31.1.0) heben Sie DM 1.000,– ab.

a) Wann können Sie zum letzten Mal DM 1.000,– abheben?

b) Wie hoch ist der Kontostand am Ende des Jahres aus Teil a)?

Aufgabe 8.24 1) Sie besitzen ein Kapital von 50.000,– DM, das Sie am 1.1.0 zu einem Jahreszins von $6\frac{1}{4}\%$ fest anlegen.

2) Auf ein am 1.1.0 eingerichtetes Konto zahlen Sie jedes Jahr zum 1.2. und zum 1.8. jeweils 500,– DM ein. Der Jahreszins sei $6\frac{1}{4}\%$.

3) Am 1.7.20 erben Sie 20.000,– DM, die auf einem Konto sofort festgelegt werden. Der Jahreszins beträgt wieder $6\frac{1}{4}\%$.

   a) Geben Sie die Differenzengleichung zu 1), 2) und 3) an.

   b) Welche Summe steht Ihnen zur Silvesterfeier am 31.12.28 zur Verfügung?

Aufgabe 8.25 Wie hoch muß der Kontostand am 1.12.90 sein, damit vom 1.1.90 an am ersten jeden Monats 1500,– DM bis zum 31.12.2004 abgehoben werden können? Der Zins von 6% wird jährlich gezahlt.

Wieviel ist am 1.1.2005 auf dem Konto?

Aufgabe 8.26 Vom 1.1.0 bis zum 31.12.19 zahlen Sie am Anfang eines jeden Monats 400,– DM auf ein Sparkonto ein. Die Verzinsung erfolgt jährlich und beträgt 7%.

a) Wie hoch ist Ihr Guthaben am 31.12.19?

b) Sie besitzen am 1.1.20 ein Kapital K_{20}.
Welchen Betrag (in Abhängigkeit von K_{20}) können Sie ab dem 1.1.20 zu Beginn eines jeden Jahres abheben, wenn das angesparte Kapital mit der Entnahme am 1.1.40 aufgebraucht sein soll? [Restguthaben werden jährlich zu 7% verzinst.]

c) Welcher Betrag ergibt sich in b), wenn K_{20} das Guthaben aus Teil a) ist?

Aufgabe 8.27 Am 1.1.0 legen Sie 5000,– DM zu 3% Zinsen an. Ab dem 1.1.2 zahlen Sie jedes zweite Jahr 5000,– DM zu. Wie hoch ist der Kontostand am 1.1.n?

a) Vor Zinsgutschrift?

b) Nach Zinsgutschrift?

Sie stellen Ihre Zuzahlungen mit dem 1.1.16 ein. Zu Beginn welchen Jahres übersteigt der Kontostand DM 100.000,–?

Aufgabe 8.28 Wie hoch muß der Kontostand am 1.1.1988 sein, damit am jeweiligen Monatsersten - vom 1.2.88 ab - DM 1500,– bis Ende 2010 abgehoben werden können? Eine Kontoüberziehung ist unzulässig, der Jahreszins beträgt 4%. Geben Sie auch den Kontostand am 1.1.2011 nach Zinsgutschrift an.

Aufgabe 8.29 Sie nehmen einen Kredit in Höhe von 100.000,– DM auf. Am Ende eines jeden Monats zahlen Sie einen festen Betrag A zurück. In den ersten fünf Jahren der Laufzeit wird die Restschuld mit 3% Jahreszinsen verzinst, danach erhöht sich der Zinssatz auf 5 3/4%.

Wie groß ist A, wenn der Kredit nach 14 Jahren getilgt ist?

Geben Sie zunächst die relevanten Differenzengleichungen an.

Aufgabe 8.30 Vom 1.1.1970 bis zum 31.12.80 haben Sie zum ersten eines jeden Monats 150,– DM auf ein Sparkonto eingezahlt, das einen Jahreszinssatz von 6% auswies. Am 1.1.81 wurde der Zinssatz auf 4% gesenkt und Sie erhöhten Ihre monatlichen Einzahlungen auf 250,– DM. Dezember 1986 zahlten Sie zum letzten Mal Geld ein.

Wie hoch war der Kontostand am 1.1.87?

Aufgabe 8.31 Sie besitzen am 1.1.0 DM 20.000,–. Davon legen Sie DM 15.000,– langfristig zu einem Zins von $7\frac{1}{4}\%$ in Regierungsanleihen an. Das restliche Geld möchten Sie als Notgroschen stets schnell zur Verfügung haben und legen es deshalb auf ein Sparkonto zu 3% Zinsen. Dank günstiger Umstände können Sie monatlich Ihren Notgroschen um 100,– DM aufstocken. Sie zahlen stets am ersten eines Monats ein und alle Monate werden zu 30 Tagen gerechnet. Am 1.1.10 wird die Anleihe fällig. Wieviel Geld könnenSie insgesamt bei Auflösung aller Rücklagen in eine kleine Feier an diesem Tag investieren?

Aufgabe 8.32 Sie zahlen am 10. jeden Monats DM 300,- auf ein Sparkonto ein (1 Monat = 30 Zinstage). Jährliche Verzinsung, Zinssatz 4%, Sparbeginn 01.01.1985, Sparende 31.12.1995. Geben Sie den Kontostand am 01.01.1996 an.

Aufgabe 8.33

a) Vom 1.1.0 bis zum 31.12.35 zahlen Sie zu Beginn eines jeden Monats 100,– auf ein Sparkonto mit jährlicher Verzinsung zu 6% ein. Welcher Betrag befindet sich am 31.12.35 auf Ihrem Konto?

b) Am 1.1.40 besitzen Sie ein Kapital von 100.000,– DM, das auf einem Konto zu 6% Jahreszinsen liegt. Welchen Betrag können Sie am Ende eines jeden Monats abheben, wenn das Kapital zum 31.12.70 aufgezehrt sein soll?
Restguthaben werden jährlich zu 6% verzinst.

Aufgabe 8.34 Vom 1.1.1970 wurde monatlich (zum ersten) bis zum 31.12.80 DM 150,– gespart, Zinssatz 5%. Vom 1.1.81 - 31.12.80 DM 250,–, Zinssatz 4%, Zinsgutschrift zum 31.12.

Wieviel ist am 1.1.87 auf dem Konto gewesen?

Aufgabe 8.35 Ein Sparkonto habe einen Jahreszins von $3\frac{3}{4}\%$. Am Ende eines jeden zweiten Monats zahlen Sie A,- DM ein.

Wie groß ist A, wenn am 1.1.18 genau 20.000,– DM auf dem Konto stehen. Beachten Sie, daß Beträge, die m-Monate ($1 \leq m \leq 12$) im Jahr auf dem Konto liegen, mit $\frac{m}{12} \cdot 3,75$ Prozent verzinst werden. Startpunkt ist der 1.1.0.

Aufgabe 8.36 Sie nehmen einen Kredit in Höhe von DM 100.000,– auf. Zu Beginn eines jeden Monats zahlen Sie 720,– DM zurück. Die erste Rate wird gleich bei Auszahlung einbehalten. Die Restschulden werden mit 6% verzinst. Geben Sie den Termin der letzten Ratenzahlung an.

Aufgabe 8.37 Sie besitzen ein Kapital K=100.000,- DM. Sie legen dieses zum 1.1.87 fest zu einem Jahreszins von 6% an.

a) Geben Sie die Differenzengleichung für $S_n :=$ "Kontostand am 1.1.n" an.

b) Bestimmen Sie den Kontostand am 1.1.2007.

Aufgabe 8.38 Eine Versicherung zahlt jeden Monatsersten zehn Jahre lang eine Rente von DM 1.500,–. Wie hoch ist der Kapitalwert dieser Rente, wenn monatliche Zinsgutschrift und ein jährlicher Zinssatz von 4,8% zugrundegelegt werden? (Wert des Kapitals am Tag der ersten Rentenzahlung.)

Hinweis: Man stelle die Differenzengleichung auf.

Aufgabe 8.39 Am 1.1.0 besitzen Sie ein Kapital K=10.000,– DM, das Sie zu $6\frac{1}{4}$% Jahreszinsen fest anlegen. Ab dem 1.1.1 zahlen Sie jedes Jahr zum ersten Januar zusätzlich 500,– DM ein.

a) Geben Sie die Differenzengleichung für S_n= "Kontostand am 1.1.n nach Zuzahlung" für $n \geq 1$ an.

b) Bestimmen Sie den Kontostand am 1.1.19.

Aufgabe 8.40 Sie besitzen ein Kapital von 70.000,– DM, das am 1.1.0 zu einem festen Jahreszins von $5\frac{3}{4}$% angelegt wird. Ab dem 1.1.5 heben Sie zu Jahresbeginn jeweils 5000,– DM ab.

a) Geben Sie die Differenzengleichung für S_n = "Kontostand am 1.1.n nach Auszahlung" für $n \geq 5$ an.

b) Wie viele volle Jahre können Sie beim angegebenen Verbrauch von Ihrem Kapital zehren?

Aufgabe 8.41 Ein Konto werde zu 6% Jahreszinsen eingerichtet. Ab dem 1.1.0 zahlen Sie zum Anfang eines jeden Monats 100,– DM ein. Gelder, die im Jahr m-Monate auf dem Konto stehen, werden mit

$$\frac{p \cdot m}{12} \text{ Prozent } \ (p = 6) \ \text{ verzinst.}$$

a) Geben Sie die Differenzengleichung für S_n= “Kontostand am 1.1.n” an.

b) Zu Beginn welchen Jahres übersteigt der Kontostand 50.000,– DM?

Aufgabe 8.42 Vom 1.1.80 - 31.12.85 wurden am Ende jeden Monats DM 200,– auf Konto eingezahlt. Verzinsung jährlich mit 6%. Wieviel ist am 1.1.86 auf dem Konto?

Aufgabe 8.43 Aus einem Kapital von DM 100.000,– soll 20 Jahre lang zu jedem 1. eines Monats eine feste Rente gezahlt werden. Der Zinssatz ist 6% jährlich.

Aufgabe 8.44 In der Silvesternacht 84/85 fassen Sie den Entschluß, das Rauchen aufzugeben. Das dadurch gesparte Geld von DM 120,– pro Monat (ein Päckchen Zigaretten pro Tag) legen Sie jeweils am Monatsende zu 8% Jahreszinsen an, die erste Einzahlung erfolgt also am 31.01.85.

a) Wie ist der Kontostand am 1.1.86?

b) Zum 25-jährigen Jubiläum Ihres Entschlusses geben Sie von dem angesparten Kapital ein rauschendes Fest. Wieviel Geld steht Ihnen dafür zur Verfügung? (Kontostand 1.1.2010)

Aufgabe 8.45 Vom 1.1.1970 bis zum 31.12.80 haben Sie zum ersten eines jeden Monats 150,- DM auf ein Sparkonto eingezahlt, das einen Jahreszinssatz von 6% auswies. Am 1.1.81 wurde der Zinssatz auf 4% gesenkt und Sie erhöhten Ihre monatlichen Einzahlungen auf 250,– DM. Dezember 1986 zahlten Sie zum letzten Mal Geld ein.

Wie hoch war der Kontostand am 1.1.87?

Aufgabe 8.46 Sie seien Eigentümer eines Kapitals K, das Sie mit 12% Verzinsung (pro Jahr) anlegen. Am Ende eines jeden Jahres entnehmen Sie zum Inflationsausgleich 6% mehr als im Jahr zuvor. Erstmalig genehmigen Sie sich am Ende des ersten Jahres die Rente R=48.000,– DM.

Sie können 50 Jahre auf diese Weise verleben. Verraten Sie (auf die Mark genau), wie hoch Ihr Kapital mindestens wäre.

Aufgabe 8.47 Sie seien Eigner des Kapitals K=300.000,– DM, daß Sie zu einem Zins von 11% anlegen. Am Ende eines jeden Jahres heben Sie R Mark ab.

Wie hoch darf R sein, wenn Ihr Kapital mindestens 70 Jahre ausreichen soll?

Aufgabe 8.48 Für ein Kapital K, daß Sie zum 1. des Monats M $0 \leq M \geq 11$ zur Bank bringen, erhalten Sie am Jahresende Zinsen in Höhe von $\frac{(12-M)}{12} \cdot q$ (q = Jahreszins). Nun seien Sie Eigner des Kapitals K. Dieses verleihen Sie zu Jahresbeginn selbst zu den folgenden Bedingungen: Insgesamt muß das Kapital $K' = K \cdot (\frac{104}{100})$ zurückgezahlt werden, und zwar in 7 gleichen Monatsraten. Die erste Rate wird Ende Januar fällig. Sie bringen nun am jeweils nächsten Tag die zurückgezahlte Rate zu Ihrer Bank (also erstmals am 1.2.).

Wie hoch ist q, wenn sich inklusive Zinsen am Jahresende auf Ihrem Konto dasselbe Kapital befindet, als hätten Sie K gleich zu Jahresbeginn auf einen Schlag zur Bank gebracht?

Aufgabe 8.49 Sie seien Eigner des Kapitals $K = 300.000, --$ DM, das Sie zu 11% Zinsen anlegen. In 50 Jahren wird Ihre (beitragsfreie) Lebensversicherung in Höhe von $L = 700.000, --$ DM fällig, die Sie dann sofort ebenfalls zu 11% Zinsen anlegen werden.

a) Wie hoch darf eine vorschüssig gezahlte Rente R sein, die das Kapital K in 50 Jahren verzehrt.

b) Wie hoch darf R sein, wenn Sie das Fälligwerden der Lebensversicherung in die Berechnung mit einbeziehen und von Kapital, Lebensversicherung und Zinsen 70 Jahre lang leben wollen, ohne zwischendurch Schulden zu machen? (R soll wieder vorschüssig gezahlt werden.) Wieviel ist am Schluß noch übrig?

Aufgabe 8.50 Am 1.1.87 legen Sie $K_0 = 50.000$,– DM auf einem Konto zu $p = 4,5\%$ Jahreszinsen an. Ab dem 1.4.87 zahlen Sie jeweils vierteljährlich 200,– DM auf das Konto ein. Die Zinsgutschrift erfolgt jeweils zum 31.12. und Gelder, die im Jahr m-Monate auf dem Konto liegen, werden zu $\frac{m}{12} \cdot p\%$ verzinst.

Wie hoch ist der Kontostand am 1.1.2013 vor der dann fälligen Einzahlung?

Aufgabe 8.51 Sie erhalten ab dem 1.1.84 zu Beginn eines jeden Monats 2000,– DM, die Sie sofort bei einer jährlichen Verzinsung von 9% anlegen.

i) Wie hoch ist Ihr Guthaben nach n-Jahren?

ii) Zum Ende welchen Jahres ist Ihr Guthaben erstmals höher als ein Guthaben, das eine Anlage von 100.000,– DM zum 1.1.84 bei 9% jährlicher Verzinsung erbringen würde? Wie groß ist dann die Differenz?

Aufgabe 8.52 Ihre Lebensversicherung wird fällig: 100.000,– DM

Wieviel können Sie am Ende eines jeden zweiten Monats abheben, wenn das Kapital nach 15 Jahren aufgezehrt sein soll? Restguthaben werden mi 5,5% verzinst (jährlich!).

Aufgabe 8.53 Eine Hypothek von 50.000,– DM soll durch jährliche Zahlungen nachschüssig in 12 Jahren getilgt werden. Die Restschuld wird jeweils mit einem Zinsfluß von 8% jährlich verzinst.

a) Wie groß ist die jährliche Annuität?

b) Wie groß ist die erste Tilgungsrate?

c) Wie groß ist die achte Tilgungsrate?

Aufgabe 8.54 Sie zahlen 20 Jahre lang jeden Monatsersten 100,– DM auf ein Konto mit 8% Zinsen (Jahr) ein. Ab dem 1.1.25 heben Sie am Ende eines jeden Monats 300,– DM ab. Wie lange reicht das Kapital?

Aufgabe 8.55 Sie legen 5000,– DM am 1.1.0 fest an. Wie hoch muß der Zinssatz sein, damit Sie am 31.12.18 DM 20.000,– abheben können?

Aufgabe 8.56 Vom 1.1.70 bis 31.12.83 werden am 5. jeden Monats (Gutschrift zum 6.) DM 150,– auf ein Sparkonto eingezahlt. Die Verzinsung erfolgt jährlich zu einem Zinssatz von 4%. Am 1.1.70 waren DM 12.000,– auf dem Konto. Wieviel DM sind am 1.1.86 auf dem Konto, wenn in dem betrachteten Zeitraum keine anderen Kontobewegungen vorgenommen werden? Für jeden Monat werden 30 Zinstage [also für das Jahr 360 Zinstage] gerechnet.

Kapitel 9

Stetige Funktionen

Aufgabe 9.1 Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Stetigkeit in allen Punkten von $\mathbb{R}$.

a) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} \dfrac{1}{x} & ; \quad x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \\ x^2 + 2x & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

b) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < 1 \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

c) $f(x) = |x|$

d) $g(x) = \max(|x|, x^2)$

e) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x - 2} & x \neq -1, +2 \\ 0 & x = -1 \\ 0 & x = +2 \end{cases}$$

f) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

g) $f(x) = \begin{cases} (19x^2 + 18x + 3)(x - 7) & x < 7 \\ x - 7 & x \geq 7 \end{cases}$

h) $f(x) = \begin{cases} 7x + 9 & , \quad x < 1 \\ e^x & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

i) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} \sin \pi x & x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 12x - 13} & x > 1, x \neq 27 \\ 3 & x = 27 \end{cases} \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} & x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2 Zeigen Sie, daß folgende Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetig sind, und bestimmen Sie zu $s = \frac{1}{10}$ ein $r > 0$, so daß

$$|f(x) - f(1)| < s \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x - 1| < r$$

a) $x \to |x|$ b) $x \to 2x + 1$ c) $x \to x^2$ d) $x \to x^2 + 5$ e) $x \to \sqrt{x}$

Aufgabe 9.3 a) Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Für $\delta \in]0, \infty[$ gibt es $x \in]o, \delta[$ mit $|f(x)| > \frac{1}{2}$.

b) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit im Nullpunkt.

Aufgabe 9.4 Untersuchen Sie, ob folgende Grenzwerte existieren und berechnen Sie sie gegebenenfalls

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 8x + 8}{(x - 2)}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 + ax - 5a^2x^2}{2x^3 - ax^2}$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 5}{(x - 1)^2}$

Aufgabe 9.5 a) Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ stetig. Es sei

$$\begin{aligned} h : M \to & \quad \mathbb{R} \\ x \to & \quad \max(f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Zeigen Sie: h ist stetig auf M.

b) Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$.

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig. Sei

$$\begin{aligned} h : [a, b] \to & \quad \mathbb{R} \\ x \to & \quad \max_{t \in [a,x]} \{f(t)\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie: h ist stetig.

Aufgabe 9.6 Es sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to & \quad \mathbb{R} \\ x \to & \quad \begin{cases} x; & x \in \mathbb{Q} \\ 0; & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

In welchen Punkten von $\mathbb{R}$ ist die Funktion f stetig?

Aufgabe 9.7 Es seien

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, so daß

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen sie:

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 9.8 Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k, a_k \in \mathbb{R}$ und $a_m \neq 0, m$ ungerade.
Zeigen Sie: P hat wenigstens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9.9 Sei $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ stetig. Zeigen Sie: Es gibt wenigstens ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $x - f(x)$, und wenden Sie den Zwischenwertsatz an.

Aufgabe 9.10 Sei $p(x) = x^3 + 2x^2 - 2$.

a) Zeigen Sie: $p(x)$ besitzt Nullstellen in $]0, 1[$.

b) Geben Sie eine Zahl x_1 explizit anm, für die gilt $|x_1 - x_0| < \frac{1}{100}$ und x_0 ist eine Nullstelle von $p(x)$.

Aufgabe 9.11 Sei

$$\begin{aligned} f : [\sqrt{2}, 2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß für $x \in \left[\sqrt{2}, 2\right]$ gilt: $\sqrt{2} \leq f(x) \leq 2$ und $f(x) \leq x$.

b) Sei $a_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n-\text{mal}}(2)$ Zeigen sie $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Zeigen sie unter Benutzung der Stetigkeit von f, daß $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Aufgabe 9.12 Es sei $f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x \text{ rational} \\ x^2 & \text{wenn } x \text{ irrational.} \end{cases}$
In welchen Punten von $\mathbb{R}$ ist f stetig?

Aufgabe 9.13 Zeigen Sie mit der Definition der Stetigkeit, daß die Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \ x \leq 0 \\ 1 - |2^{n+1}x - 3| & ; \ x \in [2^{-n}, 2 \cdot 2^{-n}], n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & ; \ x > 2 \end{cases}$$

im Punkte $x_0 = 0$ **nicht** stetig ist.

Aufgabe 9.14 Es seien $x, y \in [0, 1]$ und $\varepsilon > 0$. Geben sie ein $\delta > 0$ an, so daß aus $|x - y| < \delta$ folgt $|x^2 - y^2| < \varepsilon$.

Kapitel 10

Differentialrechnung

Aufgabe 10.1 Ermitteln Sie die Ableitungen folgender Funktionen

a) $x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$	b) $\sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$
c) $(x-1)\sqrt{x^2 - 2x + 7}$	d) $\left(\dfrac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}\right)$
e) $x \cdot \log_2 x$	f) $a^{\cos\ x}$
g) e^{x^2}	h) x^x
i) $(x) = e^{(x + ln(1+x^2))}$	j) $f(x) = \sin(e^x + 3x^2)$
k) $f(x) = ln(\sin^2 x) \cdot e^{28x}$	l) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^8 + 19x + e^x}}{x^2 + 1}$
m) $f(x) = \sin(\sin(\sin(\sin x))$	n) $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
o) $f(x) = \cos(2x) \cdot e^{x^3}$	p) $f(x) = \dfrac{x^2 + 6\sin(4x+2)}{\cos^2(ln(x^2+7)) + 3}$
q) $\sqrt{x^2 + 2x}$	r) $\dfrac{x}{2x^2 + 3}$
s) $x^{\sqrt{x^2+1}}$	t) $13x^7 + 6x^3 - 9x + 17$
u) $+\sqrt{(\sin x + 1)}$	v) $(\log_{10} x) \cdot (\cos x)$
w) $\dfrac{x^{19} + 1}{18x^2 + 13}$	x) a^{5x}

y) $f(x) = \sin(lnx^2) + (e^{7\cos x}) \cdot \sqrt{x^2 + 6}$ für $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

z) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x + 6} \cdot \cos(e^x + ln(x^8 + 2))$

Aufgabe 10.2 Differenzieren Sie die nachfolgenden Funktionen in den angegebenen Intervallen:

a) $f_1(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, $\quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$

b) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{7+2\sin\ x}$, $\quad x \in \mathbb{R}$

c) $f_3(x) = \dfrac{(\sqrt{(\sin\ x)} + x^2)(x+1)^2}{x^2-1}$, $\quad x \in]0, \pi[-\{1\}.$

d) $f_4(x) = \dfrac{e^{\cos x} \cdot (\sqrt{x^3+6x})}{\sqrt[3]{(\sin x)^2}}$ $\quad x \in]0, \pi[.$

e) $\sin(x) \cdot \log_{10}(x)$, $\quad x \in]0, \infty[$

f) $\sin(\log(x))$, $\quad x \in]0, \infty[$

g) $f(x) = x^2 + 18x + lnx$, $\quad x \in \mathbb{R}_+$

h) $f(x) = \sqrt{x^5 + 6x^2}$, $\quad x \in \mathbb{R}_+$

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos^2 x + 2}}{\sin 2x}$, $\quad x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

j) $f(x) = x^6 \cdot \sin(e^{\cos 2x})$, $\quad x \in \mathbb{R}$

k) $f(x) = \sqrt{\cos(x^2) + 9} \cdot \ln(9x + 16)$, $\quad x \in]-\frac{16}{9}, +\infty[$

Aufgabe 10.3 Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in allen Punkten. Bestimmen Sie gegebenenfalls auch die Ableitung.

a) $$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 4 - 3x + \frac{1}{2}x^2 & 2 < x \end{cases}$$

b) $$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} x^2 + \sin(2x) + 7 & , \quad x \geq 0. \\ x^3 + \cos\ x + 6 & , \quad x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & x \in]-\infty, 1[\\ -\dfrac{1}{2}x, & x \in [1, \infty] \end{cases} \end{aligned}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x \leq 2 \\ 4-3x+\dfrac{1}{2}x^2 & 2 < x \end{cases}$$

e) $$f(x) = \begin{cases} -x^2+x+2 & x \leq 0 \\ 2x+6x^3+2 & 0 < x \leq 1 \\ 10x^2+10 & 1 < x < 2 \\ \cos x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$$

f) $$\begin{aligned} f : [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} 7 & x \in [0, 1[\\ \dfrac{3}{2}x^2 - x^3 + \dfrac{13}{2} & x \in [1, 2] \\ 0 & x \in]2, \infty[\end{cases} \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \begin{cases} 7x+2 & x \in]-\infty, 0] \\ x^2+3x+6 & x \in]0, 1[\\ 8x^3+2x^2 & x \in [1, \infty[\end{cases} \end{aligned}$$

h) $$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 \cos(\dfrac{1}{x-1}) + 1 & \qquad\quad x > 1 \end{cases}$$

i) $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{x^7+6x^3+3}{x^2+1} \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} f : [0, \infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{\sqrt{x^3+2} + x\sqrt{x+2}}{2x+3} \end{aligned}$$

k) $$\begin{array}{rl} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ x\to & \max(x,x^2) \end{array}$$

l) $$f(x)=\begin{cases} |x| & x<-7 \\ 2x+14 & -7\leq x\leq 3 \\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{25}{2} & x>3 \end{cases}$$

Aufgabe 10.4 Bestimmen sie alle lokalen Extrema der Funktion

a) $f(x)=x^6+\frac{6}{5}x^5-3x^4-4x^3+3x^2+6x-\frac{21}{5}$

b) $f(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-5x-6, & x\leq 3 \\ x^2-8x+39, & x>3 \end{cases}$

c) $f(x)=12x^5+15x^4-140x^3+30x^2+360x+13$

d) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+4$

e) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

f) $f(x)=x^2e^{-x}$

Aufgabe 10.5 Bestimmen Sie die Ableitung von f sowie alle Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte.

a) $$\begin{array}{rl} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ x\to & x^3+x^2-5x+3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rl} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ x\to & \begin{cases} x^3+2x^2+3x-6, & x<-\frac{2}{3} \\ -\frac{x^2}{2}+x-\frac{176}{27}, & x\geq-\frac{2}{3} \end{cases} \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rl} f:\mathbb{R}\to & \mathbb{R} \\ x\to & \begin{cases} x^4-x^3-3x^2+5x-2 & x\leq 4 \\ x^2-9x+182 & x>4 \end{cases} \end{array}$$

d) $f(x)=x^3-12x^2-15x+26$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}; \quad x \neq 3$

f) $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & x^3 - 7x + 6 \end{array}$

g) $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & \dfrac{2 - 1}{x^2 + 1} \end{array}$

h) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

i) $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

j) $f(x) = 3x^4 - 17x^3 + 33x^2 - 27x$

k) $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 5x - 6, & x \leq 3 \\ 2 - 8x + 39, & x > 3 \end{cases}$

l) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$

m) $\dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

Aufgabe 10.6 Zeigen Sie, daß die Funktion f bijektiv ist und bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an den angegebenen Stellen b :

$$\begin{array}{rl} f_1 : \mathbb{R}_* \to & \mathbb{R} \\ x \to & 1 + x - \dfrac{1}{x^3}; b = f(1), b = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f_2 : \mathbb{R}_* \to & \mathbb{R} \\ x \to & x^2 + \sqrt{x}; b = f(1), b = f(4), b = f(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} f_3 : [1, \infty[\to &]0, 1] \\ x \to & \dfrac{2x}{1 + x^2}; b = f(2), b = f(3). \end{array}$$

Aufgabe 10.7 Zeigen sie, daß

$$\tan = \frac{\sin}{\cos} :]. \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

streng monoton wächst. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der zugehörigen Umkehrfunktion arctan und deren Ableitung.

Aufgabe 10.8 Zeigen sie, daß sin im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wächst. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion zu

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$$

und deren Ableitung.

Aufgabe 10.9 Untersuchen Sie auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit für $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Wann ist auch die Ableitung stetig, wann differenzierbar?

Aufgabe 10.10 Berechnen Sie

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\ x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 8x + 12}{x^3 - 3x^2 + 4}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 7x^2 + 4x - 12}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

Aufgabe 10.11 Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.12 Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin\ x = x - 1$ (x im Bogenmaß!) (Bestimmen sie x bis auf Fehler $< 10^{-3}$)

Aufgabe 10.13 Zeigen sie, daß $\frac{1}{x}$ die Ableitung von $ln(x)$ ist. Benutzen Sie dabei, daß ln die Umkehrfunktion der e-Funktion ist.

Aufgabe 10.14 Bestimmen Sie bei den folgenden Funktionen den Definitionsbereich und untersuchen Sie auf Extrema (auch am Rand).

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \sqrt{1-x}, & f_2(x) = \sqrt[x]{9-x^2}, & f_3(x) = \dfrac{4-x}{\sqrt{5-2x}}, \\ f_4(x) = \sqrt{4x^2-x^4} & f_5(x) = (x-5)\sqrt{x-8}, & f_6(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{9-x^2}, \\ f_7(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}. & & \end{array}$$

Aufgabe 10.15 Es sei

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & \begin{cases} x^2 - 3x - 3, & x \leq 4 \\ -x^2 + 5x - 3, & x \geq 4 \end{cases} \end{array}$$

a) Untersuchen Sie die Funktion an der Stelle $x = 4$ auf Differenzierbarkeit.

b) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

   Hinweis: Skizzieren Sie zunächst den Graphen.

Aufgabe 10.16 Benutzen Sie die Regeln von l'Hospital, um die Differenzierbarkeit in 0 zu beweisen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x = 0. \end{array}$$

Aufgabe 10.17 Berechnen Sie direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit die

a) Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ in $a \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $a \in \mathbb{R}$. Finden Sie Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$, so daß $x^3 - y^3 = (x-a)(x^2 + bx + c)$.

c) Bestimmen Sie aus der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f(x) = x^3$ im Punkte a.

d) Bestimmen Sie aus der Definition der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ im Punkte $a, n \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 10.18 a) Es seinen a, b, c, d beliebige reelle Zahlen Berechnen Sie das Minimum der Funktion

$$\begin{array}{rc} f : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & (a - xb)^2 + (c - xd)^2 \end{array}$$

b) Rechnen Sie nach, daß für beliebige reelle Zahlen a, b, c, d gilt:

$$(ac + bd)^2 \geq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Kapitel 11

Extremwertaufgaben

Aufgabe 11.1 Die Verunreinigung eines Binnengewässers vollzieht sich nach der Funktion

$$V(t) = (\sqrt[3]{t} + 2)^3,$$

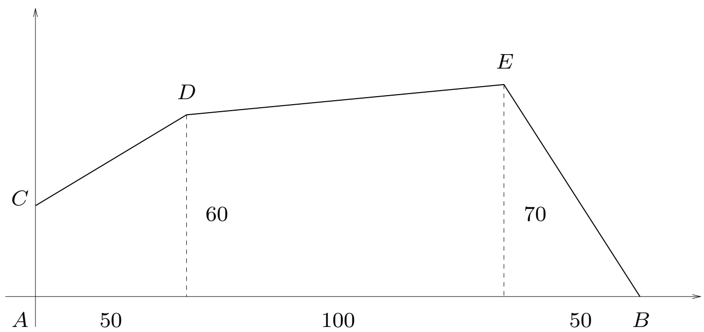
wobei t in Jahren und V in geeigenten Einheiten gemessen wird.
Wie groß ist die momentane Verunreinigungsveränderung?
Wie groß ist die momentane Veränderung in 10 Jahren?

Aufgabe 11.2 Sie besitzen das nachfolgend skizzierte Grundstück.

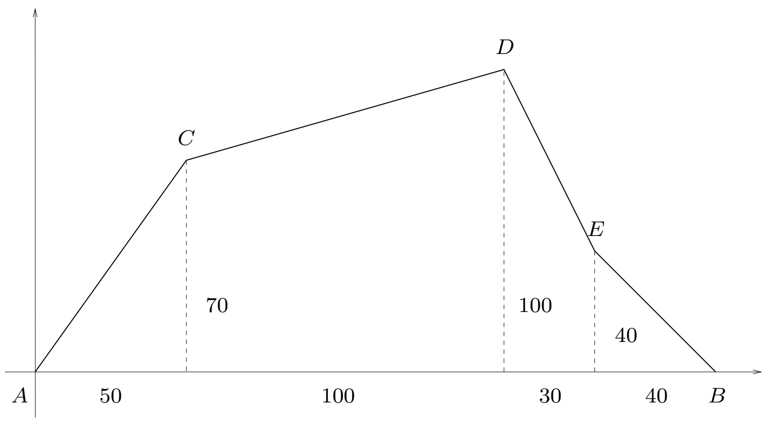
1) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden durch die Eckpunkte.

2) Errichten Sie auf dem Grundstück eine rechteckige Halle maximaler Grundfläche. Eine Seite liege dabei auf der x-Achse (Berechnen Sie auch die maximale Fläche).

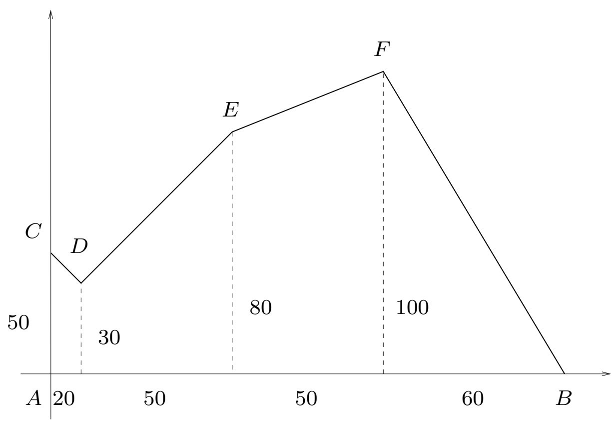
a)



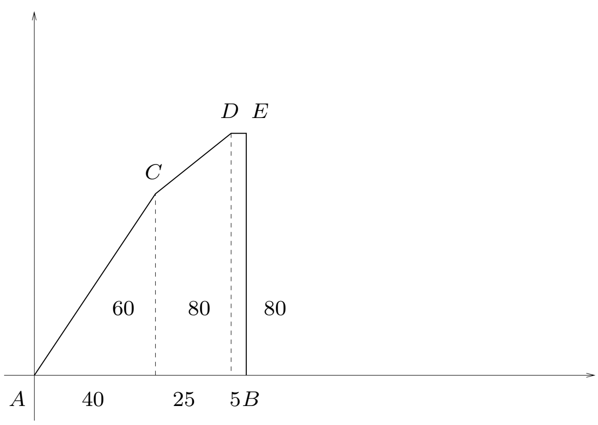
b)


D
C
E
70
100
40
A
50
100
30
40
B

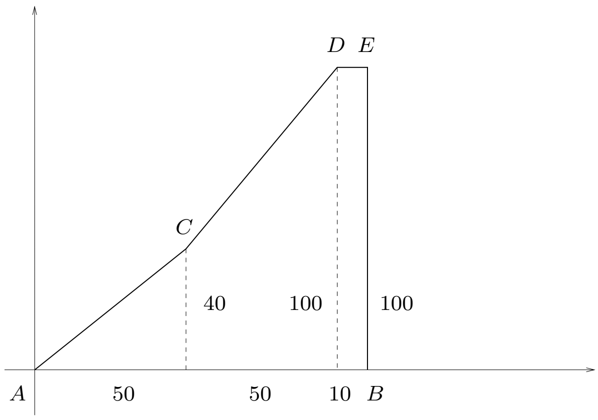
c)


F
E
C
D
50
30
80
100
A
20
50
50
60
B

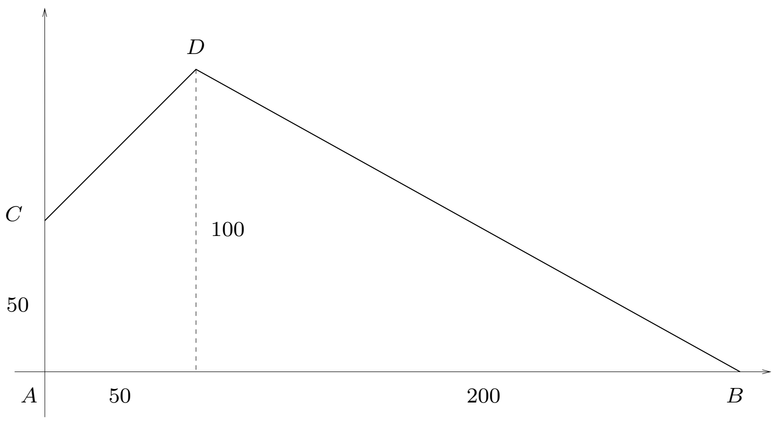
d)


D E
C
60
80
80
A
40
25
5
B

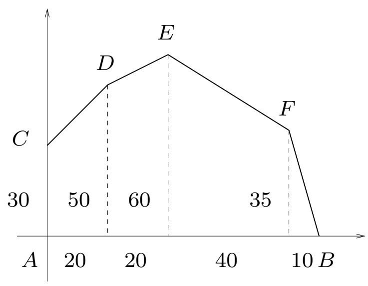
e)



f)

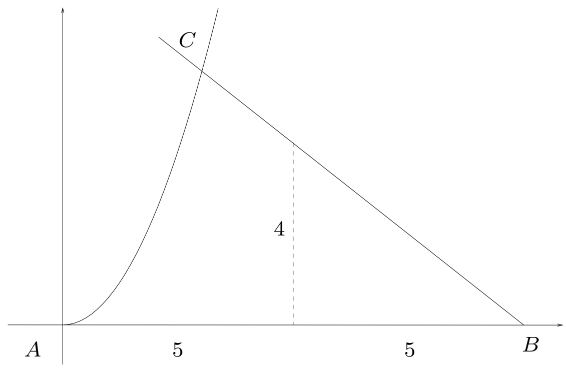


g)

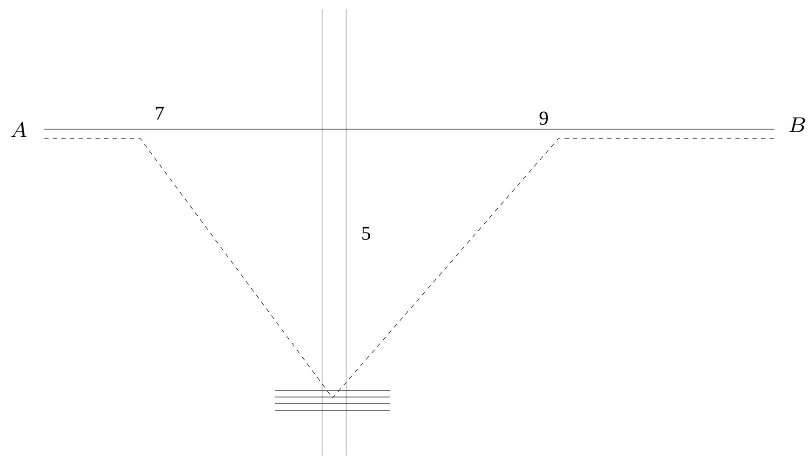


Aufgabe 11.3 Finden Sie das achsparallele Rechteck größten Flächeninhalts, das ganz in der nachfolgend skizzierten Fläche liegt. Geben Sie den

maximalen Inhalt an. Die gekrümmte Begrenzung auf der linken Seite ist durch $y = x^2$ gegeben.



Aufgabe 11.4 Zwischen den Dörfern A und B soll ein Weg gebaut werden. Eine bereits bestehende Brücke über den zwischen den Dörfern fließenden Bach wird dabei benutzt. Folgende Streckenführungen sind möglich:



Die Baukosten betragen beginnend in A in gerader Richtung 300 GE/km, vom Knick bis zur Brücke 400 GE/km, von der Brücke bis zum zweiten Knick 700 GE/km und auf dem Schlußstück 500 GE/km. Minimieren Sie die Baukosten. Geben Sie die minimalen Baukosten und die Gesamtlänge des Weges bei minimalen Kosten an.

Aufgabe 11.5 Aus einem quadratischen Stück Blech von 6 m Kantenlänge soll eine quadratische Wanne der Höhe x geschweißt werden, indem man Quadrate der Kantenlänge x an den Ecken ausschneidet, die Kanten hochbiegt und dann verschweißt. Maximieren Sie das Volumen.

Aufgabe 11.6 Ein Produktionsbetrieb rechnet bei der Herstellung einer bestimmten Ware mit Fixkosten von 15.000 DM und variablen Kosten $k_1(x)$ pro produzierter Wareneinheit (WE) bei einer Gesamtproduktion von x WE im betrachteten Zeitraum. Der Betrieb geht dabei davon aus, daß die variablen Kosten $k_1(x)$ bei wachsender Produktion linear abnehmen. Genauer

$$k_1(x) = 30 - \frac{x}{5}$$

a) Stellen Sie die Gesamtkostenfunktion k in Abhängigkeit von den produzierten WE auf.

b) Bei welcher Produktion hat der Betrieb maximale Kosten?

c) Bei welcher Produktion hat der Betrieb keine Kosten?

d) Was halten Sie von diesem Modell einer Kostenfunktion?

Aufgabe 11.7 Ein Produktionsbetrieb rechnet bei der Produktion einer bestimmten Ware mit Kosten $k(x)$ pro WE bei einer Produktion von x WE im betrachteten Zeitraum, wobei

$$k(x) = 1 + \frac{3500}{x} \qquad GE \text{ Geldeinheiten.}$$

Auf dem Markt erzielt eine WE einen Preis von

$$p(x) = 5 - \frac{x}{2000} \qquad GE,$$

falls im betrachteten Zeitraum x WE angeboten werden.

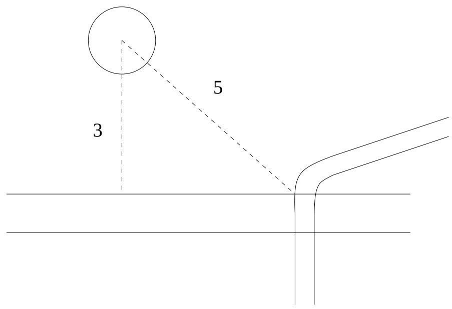
a) Ermitteln Sie die Gewinnfunktion.

b) Bei welcher Produktion wird ein Gewinn erzielt?

c) Bei welcher Produktion ist der Gewinn maximal?

d) Skizzieren Sie Gewinn- und Kostenfunktion.

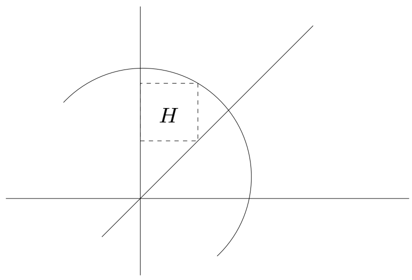
Aufgabe 11.8 Sie möchten eine für LKW's befahrene Zuwegung zu einer Stelle bauen, die 8 km vom Mittellandkanal entfernt liegt. Die nächste Straße überquert in 5 km Entfernung den Kanal. Dort soll der Weg abzweigen. Die Baukosten betragen DM 40.000,– pro Kilometer längs des Kanals und DM 60.000,– pro Kilometer durch den Wald. Minimieren Sie die Kosten!



Aufgabe 11.9 Auf Ihrem Grundstück gegeben als

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 32\} \cap \{(x,y)\mathbb{R}^2, y \geq x\}$$

sollen Sie eine Halle H maximaler rechteckiger Grundfläche errichten, deren Lage Sie der Skizze entnehmen.



Aufgabe 11.10 Sie seien Mühlenbesitzer. Ihr Mehl verkaufen Sie unter dem Markennamen Waste und Rubbisch. Bei Produktion von x Tonnen Waste erlösen Sie pro Tonne $7000-20x$ DM; bei Produktion von y Tonnen Rubbisch $4000-10y$ DM pro Tonne. An Kosten (unter anderem für Korn) fallen bei Herstellung von x Tonnen Waste und y Tonnen Rubbisch $1400x^2 + 400xy + 200y^2$ DM an. Maximieren Sie Ihren Gewinn!

Wieviel wird im Gewinnmaximum hergestellt?

Aufgabe 11.11 Eine Firma stellt ein Produkt her. Maximal können 2000 Einheiten produziert werden. Die Produktionskosten betragen bei einer Produktion von x Einheiten

$$K(x) = \begin{cases} x^2 + 10x + 1000 & 0 \leq x \leq 900 \\ -3000x + 3.600000 & 900 \leq x \leq 1010 \\ x^3 - 1010x^2 + 570000 & 1010 \leq x \leq 2000 \end{cases}$$

Der Preis pro Einheit genügt der Funktion

$$p(x) = -\frac{x^2}{2} + 1000x + 20.$$

Bestimmen Sie das Gewinnmaximum.

Aufgabe 11.12 Es sei $q(x) = -x^2 + 4x + 12$ und

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y = q(x), -2 \leq x \leq 6\}.$$

Bestimmen Sie das Rechteck größten Flächeninhalts zwischen G und der x-Achse.

Aufgabe 11.13 Sie besitzen das Grundstück

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{1000}x^2 + \frac{1}{1200}y^2 \leq 1;\ x \geq 0;\ y \geq 0\}.$$

Auf G soll eine Halle maximaler rechteckiger Grundfläche errichtet werden, deren eine Seite auf der x-Achse liegen soll. Bestimmen Sie die Flächenfunktion und berechnen Sie die Maximalstelle.

Aufgabe 11.14 Zwei Autos A,B fahren auf zwei sich rechtwinklig kreuzenden Straßen mit den Geschwindigkeiten $v_A = 72$ km/h und $v_B = 54$ km/h. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich A 220 m und B 240 m von der Kreuzung entfernt, beide bewegen sich auf die Kreuzung zu.

a) Man bestimme die Funktion des Abstandes von A und B abhängig von der Zeit t in Sekunden.

b) Man berechne den kürzesten Abstand.

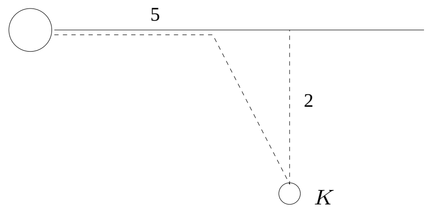
Aufgabe 11.15 Sie besitzen das Grundstück

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ y \leq 2x, x, y \geq 0\}.$$

Auf G soll eine Halle maximaler rechteckiger Grundfläche errichtet werden, deren eine Seite auf der x-Achse liegen soll.

Bestimmen Sie die Flächenfunktion und berechnen Sie die Maximalstelle.

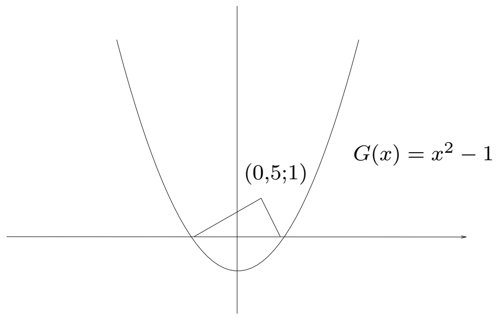
Aufgabe 11.16 Sie besitzen einen einsam im Wald gelegenen Kotten und beantragen einen Kabelanschluß. Die Geometrie sehe wie folgt aus:



Die Kosten für eine Kabelführung längs der Straße sollen 500,- DM/pro km und 600,- DM/pro km durch den Wald betragen.

Nach welcher Zeit würden sich für die Post die Verlegungskosten bei optimaler Streckenführung amortisiert haben, wenn diese Ihren Antrag annimmt und Anschlußkosten in Höhe von DM 750,- und monatliche Gebühr von DM 9,- berechnet.

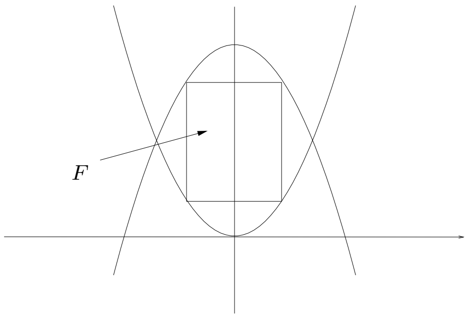
Aufgabe 11.17 Bestimmen Sie die Fläche des achsenparallelen Rechtecks größten Flächeninhalts, das in dem nachfolgend skizzierten Teil der Ebene liegt und dessen beide oberen Ecken auf der oberen Begrenzung liegen.



Aufgabe 11.18 Es sei

$$\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & 32 - x^2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rl} g : \mathbb{R} \to & \mathbb{R} \\ x \to & x^2 \end{array}$$

a) Bestimmen Sie die Fläche F eines achsparallelen Rechtecks, dessen Ecken - wie in der folgenden Skizze - auf dem Graphen von f bzw. g liegen.



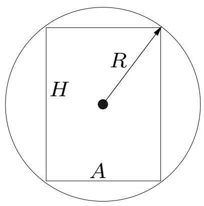
b) Bestimmen Sie unter den Rechtecken von Teil a), die in dem von den Graphen umschlossenen Bereich liegen, dasjenige maximalen Inhalts.

Aufgabe 11.19 Aus einem Baumstamm mit kreisförmigem Querschnitt soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit des Balkens ist nach den Gesetzen der Statik

$$T = c \cdot A \cdot H^2,$$

wobei A die Breite und H die Höhe des Querschnitts und c eine Konstante ist.

Wie sind A und H zu bemessen?



Aufgabe 11.20 Die Post soll eine Telefonleitung zu einem Kunden legen, der 2 km von der Hauptstraße wohnt, an der das Telefonkabel liegt. Die nächste Abzweigstelle liegt 5 km weiter. Das Kabel muß von der Abzweigstelle zum Kunden gelegt werden. Die Verlegungskosten sind DM 40,– pro Meter entlang der Straße und DM 50,– im Gelände.

Wie ist das Kabel zu verlegen, damit die Kosten minimal sind?

Aufgabe 11.21 Ein zylindrischer Kanister von 9 Liter Inhalt soll produziert werden. Boden und Deckel des Kanisters werden aus einem Blech gefertigt, das DM 0,40 pro cm^2 kostet, während für die Seiten ein Blech vom Preis von DM 0,30 pro cm^2 genügt.

Wie sind die Maße des Kanisters zu wählen, damit die Materialkosten minimal sind?

Aufgabe 11.22 Sie möchten einen geschlossenen Abwasserkanal bauen, dessen Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat. Die Kosten der Ummauerung sind proportional zum Umfang. Die Querschnittfläche ist mit $10m^2$ vorgeschrieben.

Minimieren Sie die Kosten.

Aufgabe 11.23 Ihre Fabrik stellt Bratwurst her. Die Herstellungskosten für Bratwurst der Gesamtlänge x betragen:

$$K = \begin{cases} 1500 - (30-x)^2 & 0 \leq x \leq 30 \\ 1500 + (30-x)^2 & 30 < x \end{cases}$$

Der Preis für Bratwurst der Länge x beträgt $70x$.

a) Bei welchen Wurstlängen machen Sie Gewinn?

b) Wie lang ist die Wurst, die den meisten Gewinn abwirft?

Aufgabe 11.24 Sie stellen Wein her. Die Kosten für **eine** Einheit Wasser betragen 0,085 DM, für **eine** Einheit schwefliger Säure bei einer Abnahme von x Einheiten $3 \cdot 10^{-6} \cdot x$ DM, für **eine** Einheit Traubensaftkonzentrat bei Kauf von x Einheiten $2 \cdot 10^{-4} \cdot x$ DM.

Zur Produktion von **einer** Einheit Wein benötigen sie **10 Einheiten** Wasser, **eine Einheit** schweflige Säure und **ein Zehntel einer Einheit** Traubensaftkonzentrat.

Für Gärmittel und Geschmacksverstärker müssen Sie bei einer Produktion **von x Einheiten** Wein noch einmal $0,15x$ DM aufbringen.

Die Geldstrafe für die Produktion von Wein beträgt 100.000,– DM.

a) Wie hoch sind die Kosten für die Produktion von x Einheiten Wein?

b) Der Erlös für x **Einheiten** Wein beträgt $11x - 10^{-5}x^2$ DM sofern $0 \leq x \leq 10^6$ und x DM falls $x > 10^6$. Wann arbeiten Sie mit Gewinn und bei welcher Menge Wein erreichen Sie das Gewinnmaximum?

Aufgabe 11.25 Ein Produktionsbetrieb hat bei der Produktion von x WE einer bestimmten Ware Produktionskosten in der Höhe von

$$k(x) = 572 + x + 2x^2 + 2x^3 \quad GE$$

Bei einem Angebot von x WE dieses Produkts kann **pro** x WE ein Preis

$$p(x) = 295 - 2x \quad GE$$

erzielt werden.

a) Bei welcher Produktion macht der Betrieb keinen Verlust?

b) Bei welcher Produktion ist der Gewinn maximal?

c) Wie groß ist der Gewinn bei optimaler Produktion?

Kapitel 12

Höhere Ableitungen

Aufgabe 12.1 Verifizieren Sie durch vollständige Induktion die Formeln für die k-te Ableitung

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)} = (-1)^k \frac{k}{x^{k+1}}; \qquad k \geq 0$

b) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(k)} = 2k! \frac{1}{(1-x)^{k+1}}; \qquad k \geq 1$

c) $\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^{(k)} = (-1)^k k! \left(\frac{1}{x^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}}\right); \qquad k \geq 0$

d) $\ln^{(k)}\left(\frac{1}{1+x}\right) = (-1)^k (k-1)!(1+x)^{-k}; \qquad k \geq 1$

e) $\left(\frac{1}{3x+2}\right)^{(k)} = (-1)^k k! \frac{3^k}{(3x+2)^{k+1}}; \qquad k \geq 1$

Aufgabe 12.2 Zeigen Sie die Konvergenz folgender Reihen

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in \mathbb{R}$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} \qquad -1 < x < 1$

Geben Sie möglichst gute Restabschätzungen an. Unterscheiden Sie dabei gegebenenfalls zwischen $x \geq 0$ und $x < 0$.

Aufgabe 12.3 Zeigen Sie, daß folgende Reihen konvergieren

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{k!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k-1)}{k^2+1}.$$

Aufgabe 12.4 Untersuchen Sie auf Konvergenz

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k} \cdot 2^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Aufgabe 12.5 Bestimmen sie die Taylorpolynome in $x_0 = 0$ und $x_0 = 1$.

a)	$x^5 + 4x^3 - 2x^2 + x - 5$	b)	$x^7 + 3x^6 + 7x^5 + x^3 + 9x^2 + 2x + 1$
c)	$\ln(x^2 + 1)$	d)	$\dfrac{1}{1 + x^2}$
e)	$\sin x$	f)	$\ln(x + 1)$
g)	e^x	h)	$x^3 - 7x + 6$

Aufgabe 12.6 Bestimmen Sie das 5. Taylorpolynom p_5 von $\sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$. Berechnen Sie $\sqrt{3}$ mit Hilfe eines geeigneten Taylorpolynoms bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-5}. Benutzen sie dabei, daß $\sqrt{3} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{48}{49}}$.

Aufgabe 12.7 Bestimmen Sie das n-te Taylorpolynom der Funktion $\sqrt{x}$ bei $x_0 = 1$. Geben Sie für $x \geq 1$ eine Abschätzung für

$$\left|\sqrt{x} - p_{n,1}\right|$$

an.

Aufgabe 12.8 Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $x \geq 1$ die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{x} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (x-1)^k \right| \leq (x-1)^{n+1}$$

gilt.

Aufgabe 12.9 Bestimmen Sie die Taylorreihe von $\ln(\frac{1}{1+x})$ für $x_0 = 0$ und untersuchen Sie diese Reihe für $x = \frac{1}{2}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 12.10 Bestimmen Sie die Taylorpolynome von sin und cos an der Stelle $x_0 = 0$. Berechnen Sie mit ihrer Hilfe die Werte $\sin 1$ und $\cos 1$ bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-5}.

Aufgabe 12.11 Bestimmen Sie die Taylorpolynome von $\ln \frac{1+x}{1-x}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Polynome und dem Taylorschen Satz den Wert von $\ln 2$ bis auf einen Fehler kleiner als 10^{-4}.

Kapitel 13

Matrizenrechnung

Aufgabe 13.1 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Welche Produkte aus zwei Faktoren der Matrizen A, B, C und D sind definiert?

b) Berechnen Sie alle diese Produkte.

c) Berechnen Sie

$$(B + C) \cdot A \cdot D$$

Aufgabe 13.2 Finden sie eine $(4, 4)$ Matrix B, so daß $A \cdot B = 0$ (0: die Nullmatrix) für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ mit } B \neq 0.$$

Aufgabe 13.3 Es sei A die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Zeichnen Sie die Flächenstücke, die von den Vektoren

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \left\{ A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ sowie}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \left\{ A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ aufgespannt}$$

werden.

Aufgabe 13.4 Bestimmen Sie eine $(3,3)$-Matrix A, so daß für alle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

gilt:

$$(x_1, x_2, x_3)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2x_3$$

Aufgabe 13.5 a) Sei g die Gerade durch die Punkte $(1,1)$ und $(5,-2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der zu g parallelen Geraden durch $(1,2)$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der linearen Funktion, die in den Punkten 1 und 7 die Werte 1 und 4 annimmt.

Aufgabe 13.6 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechne $A \cdot B, A \cdot C$.

b) Welche Produkte mit 3 Faktoren sind definiert?

c) Berechnen Sie die Produkte in b).

Aufgabe 13.7 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & 11 \\ 5 & 9 & 4 & -1 \\ 7 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \\ -3 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad E = (1\ 1\ 1\ 1).$$

Man berechne $ABCDE$.

Aufgabe 13.8 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Man berechne $AB, BA, A^2B^2, B^2A^2, AB - BA$ und $\frac{1}{2}(AB + BA)$.

Aufgabe 13.9 Man berechne

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 7 & 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ (4 & 7 & 8 & 2) \\ 9 & 4 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

b)

$$(1\ 2\ 2) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.10 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 8 \\ 2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie: $B \cdot A; A \cdot C; C \cdot C$.

Aufgabe 13.11 a) Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}; 17 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

b) Rechnen Sie nach:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.12 Finden sie eine Lösung der Matrizengleichung $A \cdot X = B$, wobei

a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.13 Sei Q eine $n \times n$ Matrix mit von Nullverschiedenen Elementen nur unterhalb der Hauptdiagonalen, in der Hauptdiagonalen und darüber habe Q nur Nullen stehen. Man zeige: $Q^n = 0$ (Nullmatrix).

Anleitung: Man überlege sich zunächst, daß Q^2 eine Diagonale voll Nullen unterhalb der Hauptdiagonale hat.

Aufgabe 13.14 Bilden Sie alle möglichen Produkte von jeweils dreien der nachfolgenden Matrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; $(2, 3, 4)$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.15 a) Finden sie zwei 2×2 Matrizen A und B für die $AB \neq BA$.

b) Rechnen Sie folgenden Sachverhalt nach:

Ist A eine 2×2 Matrix mit der Eigenschaft:

$$AX = XA \text{ für } \underline{\text{jede}}\ 2 \times 2 \text{ Matrix } x,$$

dann hat A die Form $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis zu b): Es genügt einige wenige Matrizen X zu betrachten.

Kapitel 14

Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 14.1 Überprüfen Sie die nachfolgenden Gleichungssysteme auf Lösbarkeit und geben Sie im Falle der Lösbarkeit alle Lösungen an:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 7x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 4 & 0 \\ 10 & 15 & 11 & 2 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} ax_1 & + & a^2x_2 & + & a^3x_3 & = & 1 \\ a^2x_1 & + & a^3x_2 & + & a^2x_3 & = & 1 \quad a \in \mathbb{R} \\ a^3x_1 & + & a^2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 6x_2 & - & 14x_3 & + & x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 8 \\ 9x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_4 & & & = & 19 \end{array}$$

f)

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	2	0	7	1
8	3	1	4	2
9	9	9	9	9
1	2	3	4	5

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 2x_2 & + & x_1 & + & 2x_4 & - & 2x_3 & + & x_5 & = & 0 \\ 4x_2 & + & 2x_1 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 6x_4 & & & = & 0 \\ x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & & & & & = & 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & \frac{1}{P2}x_2 & + & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_3 & + & \frac{3}{2}x_4 & = & 0 \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 4x_3 & + & 3x_4 & & & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & b_3 \end{array}$$

$$\text{für } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

j)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

k)
$$\begin{array}{rcrcrcrl} \frac{1}{2}x_1 & - & 4x_2 & + & \frac{9}{2}x_3 & = & - & 16a\ ;\ a \in \mathbb{R} \\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & 9x_3 & = & - & 3a \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & & 24a \end{array}$$

l)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & a^2x_2 & + & a^3x_3 & = & 1 \\ a^2x_1 & + & a^3x_2 & + & a^2x_3 & = & 1 \\ a^3x_1 & + & a^2x_2 & + & ax_3 & = & 1 \end{array}$$

m)
$$\begin{array}{rcrcrcl} ax_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

n) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & + & 10x_4 & - & 3x_5 & = & -7 \end{array}$$

o) $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -5x_2 & +8x_3 & = & 17 \\ 6x_1 & -2x_2 & -5x_3 & = & 3 \end{array}$$

p) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_5 & & & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_4 & - & 3x_5 & & & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 10 \end{array}$$

q) $$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & = & 32 \end{array}$$

r) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 38 \end{array}$$

s) $$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 20 \\ x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 200 \\ & & 2x_2 & + & 4x_5 & = & 200 \\ & & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 66 \\ & & x_1 & - & 2x_4 & = & -\ \ 32 \end{array}$$

t) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & 8x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \end{array}$$

u) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

v) $$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & - & x_5 & & & = & 2 \end{array}$$

w) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_4 & + & x_5 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_4 & & & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_3 & - & x_5 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \end{array}$$

x) $$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & = & a \ ; \ a \in \mathbb{R} \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

y) $$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & + & x_5 & = & y_1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 6x_3 & - & 2x_4 & + & 4x_5 & = & y_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & - & 3x_5 & = & y_3 \end{array} \quad \text{für} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

z) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.2 Bestimmen Sie die Lösungen von $Ax = b_i$, für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.3 Eine Aktiengesellschaft A besitzt zwei Tochtergesellschaften T_1, T_2.

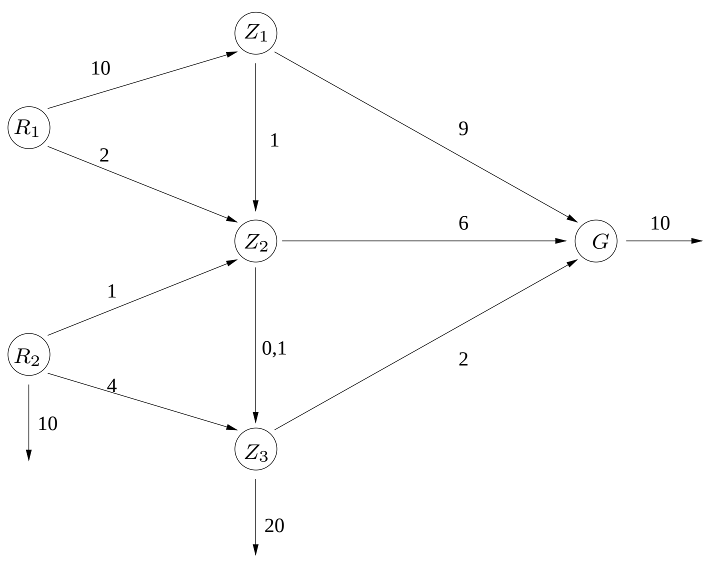
A besitzt 70% der Aktien von T_1 und 80% der Aktien von T_2.
T_1 besitzt 10% der Aktien von A und 10% der Aktien von T_2.
T_2 besitzt 20% der Aktien von A und 10% der Aktien von T_1.

Im Geschäftsjahr erwirtschaftet A einen Gewinn von 1170 GE, T_1 einen Gewinn von 240 GE und T_2 einen Gewinn von 150 GE.

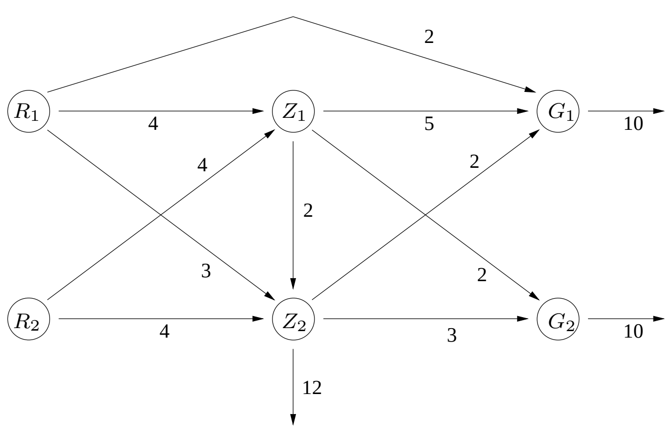
Dabei sind Investitionen und Rücklagen schon ausgeschlossen. Durch die gegenseitige Verflechtung kommen an die Aktionäre jedoch andere Summen zur Ausschüttung. Geben Sie an, welche Summen A, T_1 und T_2 an die Inhaber Ihrer Aktien ausschütten.

Aufgabe 14.4 Gegeben sei der folgende Gozintograph. Führen Sie die Teilbedarfsrechnung durch

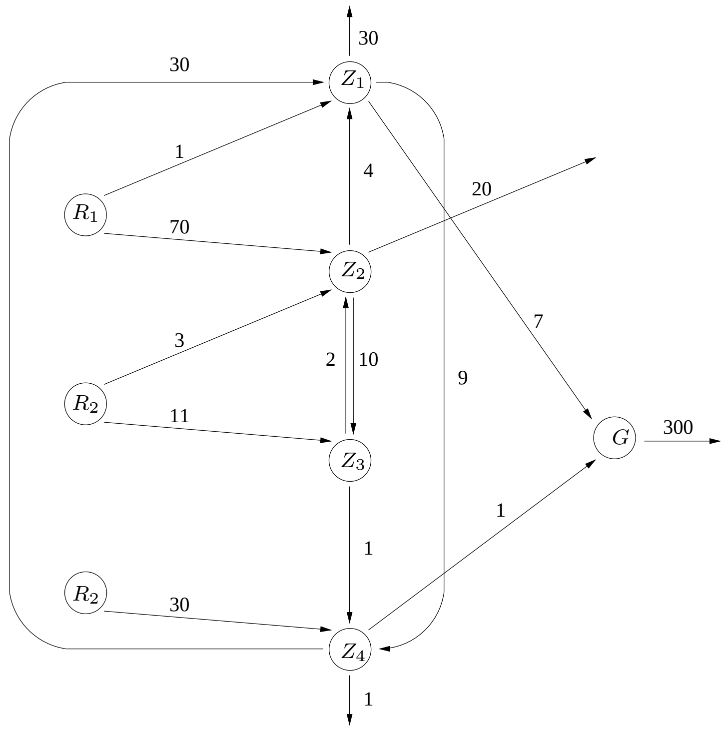
a)



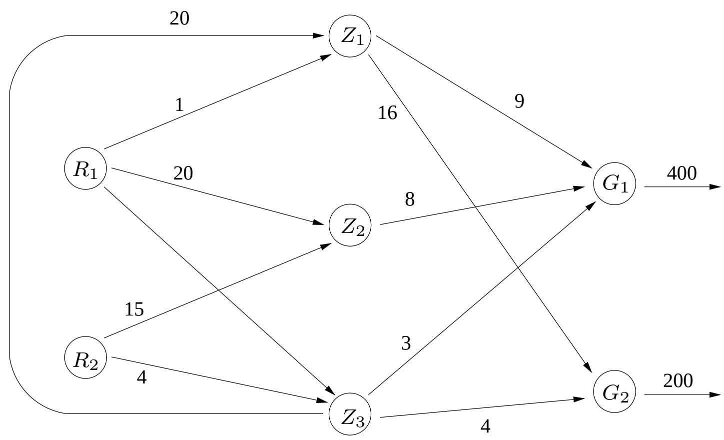
b)



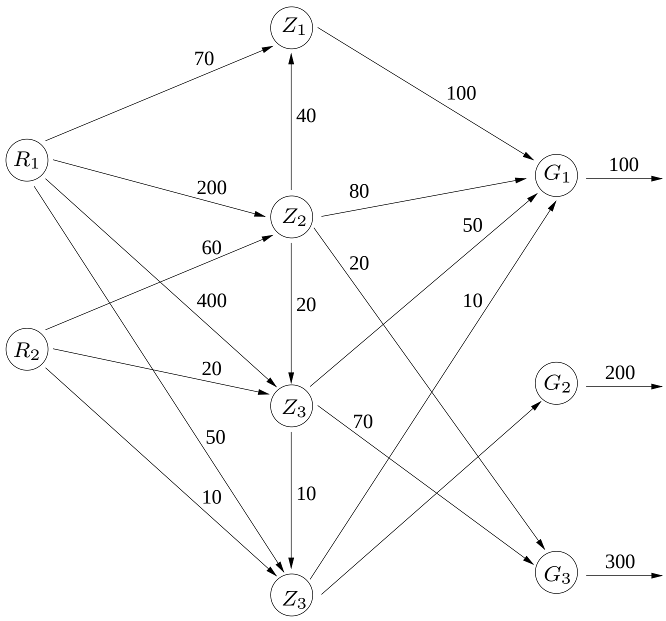
c)


30
30
Z_1
1
4
20
R_1
70
Z_2
7
3
2
10
9
R_2
11
G
300
Z_3
1
1
R_2
30
Z_4
1

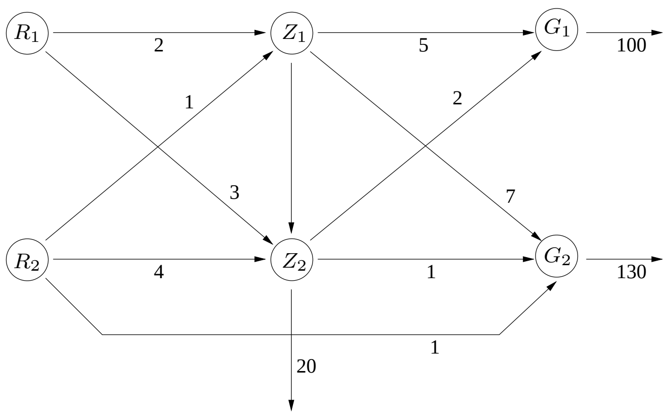
d)


20
Z_1
1
16
9
R_1
20
400
8
G_1
Z_2
15
3
R_2
4
G_2
200
Z_3
4

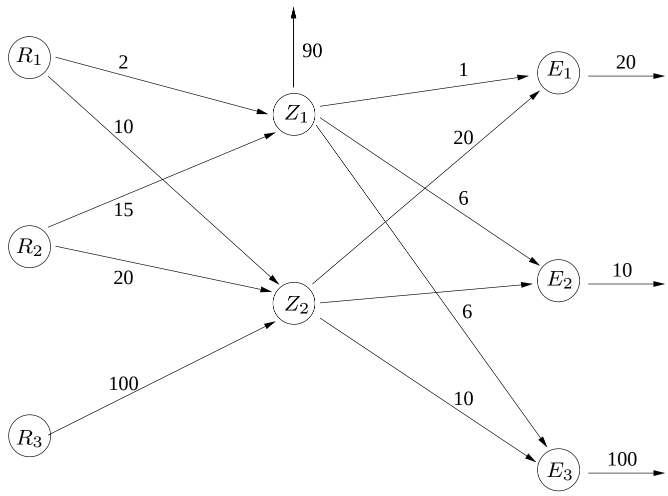
e)


Z_1
70
40
100
R_1
G_1
100
200
80
Z_2
50
60
20
400
20
10
R_2
G_2
200
20
Z_3
70
50
10
10
G_3
300
Z_3

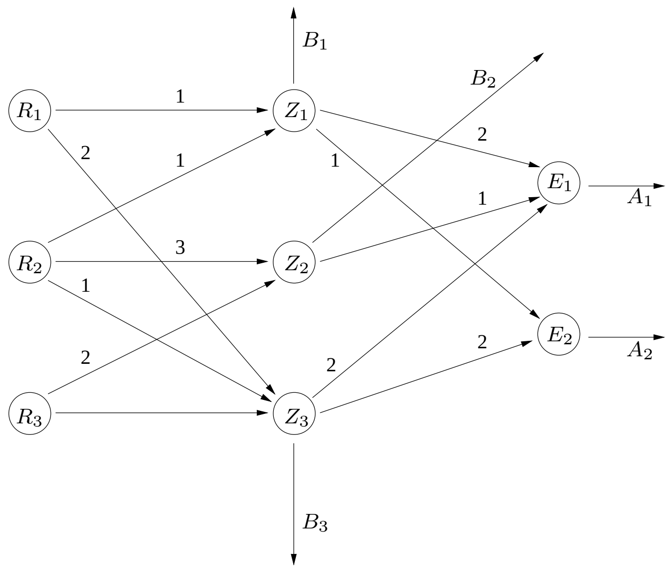
f)


R_1
Z_1
G_1
2
5
100
1
2
3
7
R_2
Z_2
G_2
4
1
130
1
20

g)



h)



i) Stellen Sie den Rohstoffbedarf in Abhängigkeit von A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 dar.

ii) Geben Sie diesen explizit für

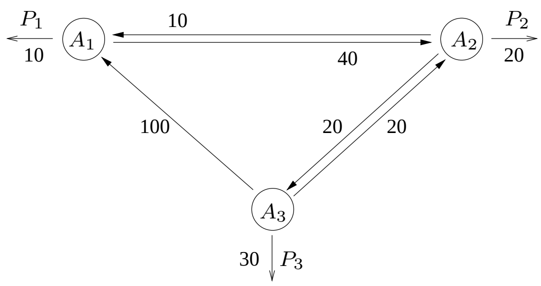
$$A_1 = 200, A_2 = 100, B_1 = B_2 = B_3 = 0 \quad \text{und}$$
$$A_1 = 200, A_2 = 100, B_1 = 50, B_2 = 100, B_3 = 200$$

an.

Aufgabe 14.5 Ein Betrieb habe Abteilungen A_1, A_2, A_3, die einander beliefern und Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Markt bringen. Die Gesamtkosten des Betriebes in Höhe von DM 100.000,– verteilen sich wie folgt:

Für A_1: DM 20.000,–
Für A_2: DM 20.000,–
Für A_3: DM 60.000,–.

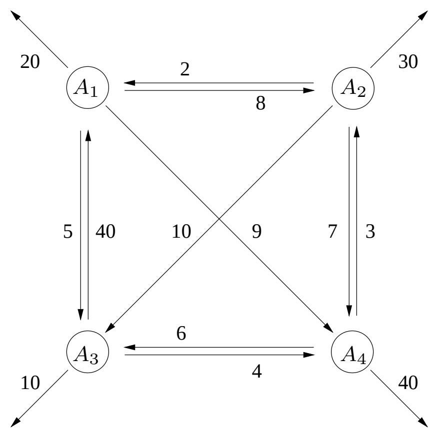
Die Lieferungen (in Stückzahlen) sind im folgenden Schaubild dargestellt:



Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise sollen den Marktpreisen entsprechen. Bestimmen Sie die fiktiven Kosten der A_i.

Aufgabe 14.6 Berechnen Sie die fiktiven Kosten in folgendem Modell innerbetrieblicher Leistungsverflechtung. Die Primärkosten betragen:

A_1	A_2	A_3	A_4
4000	3000	1000	2000



Aufgabe 14.7 Ein Betrieb produziert aus vier Grundstoffen G_1, G_2, G_3, G_4 vier verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4. Diese Produkte können nur

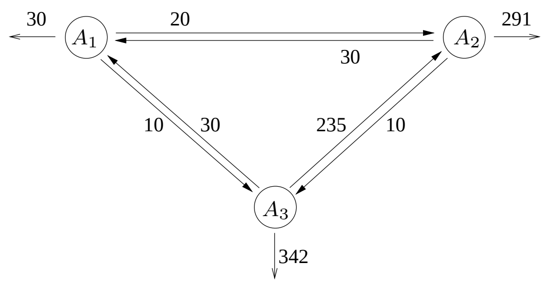
in <u>ganzen</u> ME (Mengeneinheiten) produziert werden. Der Bedarf an Grundstoffen für die Produktion einer ME ist wie folgt:

	Bedarf an			
	G_1	G_2	G_3	G_4
P_1	1	0	1	0
P_2	1	2	1	2
P_3	2	1	3	2
P_4	0	1	1	2

Zur Verfügung stehen 12 ME von G_1, 9 ME von G_2, 15 ME von G_3 und 12 ME von G_4. Wie muß produziert werden, damit <u>alle</u> Grundstoffe verbraucht werden? Geben Sie <u>alle</u> möglichen Produktionskombinationen an.

Begründen Sie, warum in Ihrer Antwort nicht mehr Kombinationen als die angegebenen möglich sind.

Aufgabe 14.8 Ein Betrieb produziert an Fertigungsstätten A_1, A_2 und A_3. Die Lieferungen in ME auf den Markt und die Lieferungen der Abteilungen untereinander entnehmen sie dem folgenden Schaubild:



Die Primärkosten betragen in A_1 294000 GE, in A_2 536000 G und in A_3 103000 GE. Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise in Prozenten der jeweiligen Marktpreise sind in nachstehendem Schema aufgelistet:

Lieferung $\rightarrow$ nach $\uparrow$ von	A_1	A_2	A_3
A_1	-	50 %	200 %
A_2	20 %	-	40 %
A_3	60 %	20 %	-

Bestimmen Sie die Marktpreise so, daß jede Abteilung genau kostendeckend arbeitet.

Aufgabe 14.9 Ein Betrieb produziert drei Produkte P_1, P_2, P_3, die in 4 miteinander arbeitenden Abteilungen A_1, A_2, A_3, A_4 hergestellt werden. Die monatlichen Kosten von DM 200.000,– verteilen sich wie folgt:

$$\begin{array}{rr} A_1: & 20.000,-- \\ A_2: & 30.000,-- \\ A_3: & 50.000,-- \\ A_4: & 100.000,-- \end{array}$$

Die Endprodukte P_i gehen aus A_i heraus, $i = 1, 2, 3$. Die Abteilungen beliefern sich untereinander. Der Kostenaufwand gliedert sich

für / in	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	20%	40%	30%	10%
A_2	40%	40%	10%	10%
A_3	60%	0%	30%	10%
A_4	50%	30%	20%	0%

a) Stellen Sie das Gleichungssystem zur Ermittlung der Gesamtkosten der Abteilungen auf.

b) Ermitteln Sie die Kosten für die Produktion von P_1, P_2, P_3.

Aufgabe 14.10 Für welche Werte der Konstanten a, c hat das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcr} ax & + & 2y & = & c \\ 5x & + & 4y & = & 20 \end{array}$$

i) genau eine

ii) keine

iii) unendlich viele Lösungen.

Man veranschauliche das Ergebnis graphisch.

Aufgabe 14.11 Man Löse

$$\begin{array}{rcl} e^{x+y} & = & 1 \\ e^{x+4y} & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 14.12 Welche der folgenden Gleichungen

$$Ax = b^i$$

besitzen eine Lösung. Geben Sie im Falle der Existenz auch explizit eine an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } b^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.13 Eine Volkswirtschaft bestehe aus einem Geld- und einem Gütermarkt. Es herrsche über einen Zeitraum Gleichgewicht, wenn einerseits das Nationaleinkommen N auf dem Gütermarkt durch Ausgaben für Konsum K, für Investitionen I und für Regierungszwecke R genau verbraucht wird, andererseits das auf dem Geldmarkt zu einem Zinssatz von $z\%$ angebotene Kapital c durch Transaktionsnachfrage T und Spekulationsnachfrage S genau aufgenommen wird.

i) Man berechne (Gleichgewichts-) N und z unter den Annahmen:

$$\begin{aligned} &T = 1/2N, K = 50 \text{ Mill.DM } + 3/4N, I = \frac{500}{z} \text{ Mill.DM},\\ &S = \frac{1000}{z} \text{ Mill.DM. } c = 700 \text{ Mill.DM }, R = 100 \text{ Mill.DM;}\\ &(T \sim N, I \sim 1/z, S \sim 1/z \text{ Keynes-Annahmen}). \end{aligned}$$

ii) Sei $N = 1000$ Mill.DM und $T = aN, a \geq 0$; alles übrige wie in i). Man gebe a in Abhängigkeit von z an. Da $a \geq 0$, wie niedrig darf z höchstens sein?

Aufgabe 14.14 Gegeben seien drei Aktiengesellschaften A_1, A_2, A_3, die voneinander die folgenden Anteile besitzen:

a)

von $\downarrow$	A_1	A_2	A_3
A_1	-	50 %	40 %
A_2	5 %	-	5 %
A_3	30 %	50 %	-

b)

von $\downarrow$	A_1	A_2	A_3
A_1	-	50 %	60 %
A_2	10 %	-	30 %
A_3	5 %	10 %	-

c)

von $\downarrow$	A_1	A_2	A_3
A_1	-	15 %	10 %
A_2	10%	-	40 %
A_3	30 %	45 %	-

Die A_i machen die folgenden Primärgewinne (in DM):

a)

A_1	A_2	A_3
1.000.000	10.000	200.000

b)

A_1	A_2	A_3
10.000	20.000	100.000

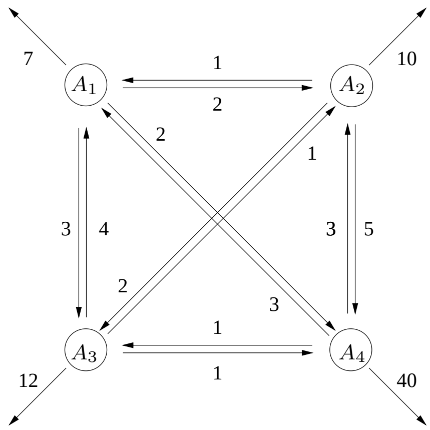
c)

A_1	A_2	A_3
50.000	70.000	2.000

Wieviel DM können die A_i an die hier nicht aufgeführten Anteilseigner ausschütten?

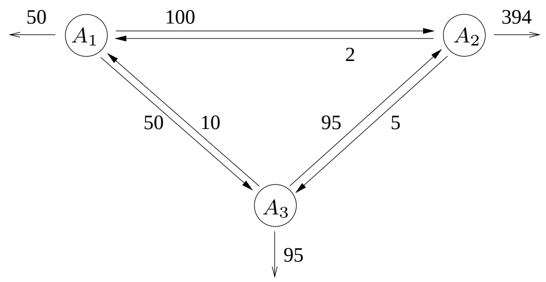
Aufgabe 14.15 Ein Betrieb erbringt in seinen Abteilungen A_i Leistungen. Die Leistungsabgabe untereinander und an den Markt sowie die Primärkosten sind in den folgenden Diagrammen angegeben. Ermitteln Sie die (fiktiven) Kosten pro Mengeneinheit, die in den einzelnen Abteilungen entstehen.

a)



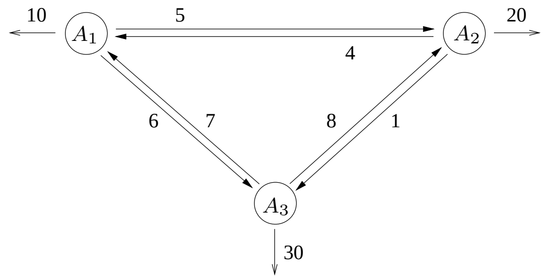
Die Primärkosten betragen in A_1 18 E, in A_2 22 E, in A_3 25 E und in A_4 5E.

b)



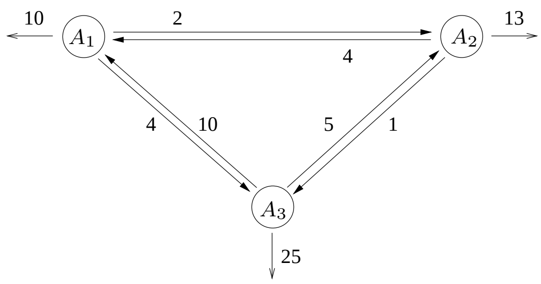
Die Primärkosten betragen in A_1 10000,- DM, in A_2 50000,- und in A_3 20000,- DM.

c)



Die Primärkosten betragen in A_1 580.000,– DM, in A_2 2.170.000,- DM und in A_3 50.000,- DM.

d)



Die Primärkosten betragen in A_1 50.000,- DM, in A_2 7.500,- DM und in A_3 8.000,- DM.

Aufgabe 14.16 In den Abteilungen A_1, A_2, A_3 werden die Produkte P_1, P_2, P_3 produziert. Dazu beliefern sich die Abteilungen nach folgendem Schema:

nach / von	A_1	A_2	A_3
A_1	0	40	20
A_2	60	0	40
A_3	40	60	0

Auf den Markt werden 50 P_1, 10 P_2 und 120 P_3 geliefert. Die Primärkosten betragen in A_1 200 in A_2 440 und in A_3 260 Taler. Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise für die P_i seien nur halb so hoch wie die Marktpreise.

Berechnen sie die innerbetrieblichen Verrechnungspreise wie auch die Marktpreise der Produkte, bei denen die Bilanz jeder Abteilung ausgeglichen ist (d.h.: Erlöse=Kosten).

Aufgabe 14.17 In den Abteilungen A_1, A_2, A_3 werden die Produkte P_1, P_2, P_3 für den Markt produziert. Dazu beliefern sich die Abteilungen nach folgendem Schema mit Zwischenerzeugnissen (Angaben in Stück):

nach / von	A_1	A_2	A_3
A_1	0	10	10
A_2	40	0	20
A_3	20	60	0

Auf den Markt werden 90 P_1, 70 P_2 und 80 P_3 geliefert. Die Primärkosten betragen in A_1 400 GE in A_2 300 GE und in A_3 600 GE. Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise für die Lieferungen aus den Abteilungen A_1 und A_2

seien jeweils halb so hoch wie die Marktpreise für P_1 bzw. P_2. Die Abteilung A_3 bekommt ihre Lieferung nur für ein Viertel des Preises für P_3 bewertet.

Berechnen sie die Marktpreise für die Produkte, bei denen die Bilanz jeder Abteilung ausgeglichen ist (d.h.: Erlöse=Kosten).

Aufgabe 14.18 Ein Betrieb besteht aus 3 Abteilungen, die Leistungen untereinander und an den Markt abgeben. Die Abteilung A_1 liefere Leistungen in Höhe von $2ME$ an A_3 und $5ME$ an A_2 und $20ME$ an den Markt. Die Abteilung A_2 liefere Leistungen in Höhe von $10ME$ an A_1 und $3ME$ an A_3 und $20ME$ an den Markt, die Abteilung 3 liefere Leistungen in Höhe von $8ME$ an A_2 und $7ME$ an A_1 sowie $20ME$ an den Markt. Man berechne die Herstellungskosten x_1, x_2, x_3 der in A_1, A_2, A_3 hergestellten Güter, wenn die Produktionskosten in A_1 12.000 DM, in A_2 71.000 DM und in A_3 7.000 DM betragen.

Aufgabe 14.19 Eine Firma produziert an vier Fertigungsstätten. Die Einzelbetriebe A_1, A_2, A_3, A_4 beliefern sowohl den Markt als auch die übrigen Betriebsstätten.

Die Lieferungen in Stückzahlen entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

von nach	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	-	48	72	6
A_2	0	-	0	1000
A_3	0	40	-	390
A_4	1000	80	285	-
Markt	100	176	297	4

An Primärkosten entstehen in

A_1	A_2	A_3	A_4	
47.400	40.000	16.000	32.500	DM

Als firmeninterne Verrechnungseinheiten werden für die Lieferungen der Abteilung A_i an die Abteilung A_j die folgenden Prozente der Preise für die Lieferungen von A_i auf dem Markt festgesetzt:

von nach	A_1	A_2	A_3	A_4
A_1	-	50 %	25 %	100 %
A_2	-	-	-	10 %
A_3	-	100 %	-	100 %
A_4	50 %	200 %	100 %	-

a) Geben Sie Erlös und Kosten in Abhängigkeit von den Marktpreisen für jede Abteilung und die Gesamtfirma an.

b) Arbeiten die Abteilungen und die Gesamtfirma kostendeckend, wenn sie auf dem Markt für jeweils eine Einheit der Produkte aus den A_i die folgenden Preise erzielen:

A_1	A_2	A_3	A_4	
100	200	300	400	DM ?

Aufgabe 14.20 Ein Betrieb produziert aus vier Grundstoffen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 drei verschiedene Zwischenprodukte T_1, T_2, T_3. Den Bedarf an Grundstoffen für die Produktion einer Mengeneinheit entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

von für	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
T_1	3	2	6	0
T_2	1	1	1	1
T_3	0	3	1 7	5

Aus den Zwischenprodukten und Rohstoffen werden Endprodukte E_1, E_2, E_3 gemäß nachfolgendem Schema hergestellt:

von für	T_1	T_2	T_3	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
E_1	2	6	4	0	2	1	6
E_2	2	0	1	0	1	0	2
E_3	1	3	0	1	0	1	6

Bestimmen Sie den Bedarf an Grundstoffen, wenn a Stücke E_1, b Stücke E_2 und c Stücke E_3 hergestellt werden sollen.

Aufgabe 14.21 Aus Rohstoffen R_1, R_2, Zwischenprodukten Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 werden schließlich Endprodukte G_1, G_2, und G_3 hergestellt.

Zur Herstellung jeweils <u>einer</u> Einheit benötigen Sie die folgenden Mengen:

von / für	R_1	R_2	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
Z_1	70	0	0	40	0	0
Z_2	200	60	0	0	0	0
Z_3	400	20	0	20	0	0
Z_4	100	10	0	0	10	0
G_1	0	0	100	80	0	50
G_2	0	0	0	0	0	10
G_3	0	0	0	20	70	0

Auf dem Markt werden 100 Stück G_1, 200 Stück G_2 und 300 Stück G_3 nachgefragt.

Geben Sie die erforderlichen Rohstoffmengen an.

Aufgabe 14.22 Ein Betrieb produziert aus fünf Grundstoffen Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 drei verschiedene Produkte T_1, T_2, T_3. Den Bedarf an Grundstoffen für die Produktion einer Mengeneinheit entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

von / für	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
T_1	3	2	6	0	0
T_2	1	1	1	1	1
T_3	0	3	1	7	0

Bestimmen Sie den Bedarf an Grundstoffen, wenn

a) nur T_1 hergestellt werden soll.

b) nur T_2 hergestellt werden soll.

c) nur T_3 hergestellt werden soll.

d) 70 Stücke T_1, 20 Stücke T_2, 100 Stücke T_3 hergestellt werden sollen.

e) Geben Sie an, welche Grundstoffkombinationen überhaupt eine effiziente Produktion erlauben, d.h.: eine Produktion erlauben und zwar ohne Reste von Grundstoffen.

Aufgabe 14.23 Ein Betrieb produziert aus drei Grundstoffen Z_1, Z_2, Z_3 drei verschiedene Güter T_1, T_2, T_3,. Es sei vorausgesetzt, daß beliebige Quantitäten der $T_i, i \in \{1, 2, 3\}$ hergestellt werden können und die Herstellungsverfahren einander nicht stören. Den Bedarf an Grundstoffen für die Produktion einer Mengeneinheit entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

von für	Z_1	Z_2	Z_3
T_1	4	1	2
T_2	1	3	6
T_3	5	4	8

a) Skizzieren Sie die Menge von Grundstoffvektoren $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$ Gleichungssystem, die eine effiziente Produktion erlauben.

b) Sie bekommen $11MEZ_1, 3MEZ_2$ und $9MEZ_3$ geliefert.

Welche ganzzahligen Produktkombinationen können Sie damit herstellen?

Welche Rohstoffmengen bleiben jeweils übrig?

Aufgabe 14.24 Für welche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das folgende Gleichungssystem lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.25 Lösen Sie für

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

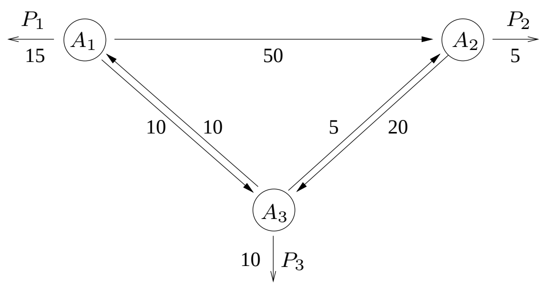
mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ beliebig, das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 12 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = b.$$

Aufgabe 14.26 Ein Betrieb habe Abteilungen A_1, A_2, A_3, die einander beliefern und Produkte P_1, P_2, P_3 auf den Markt bringen. Die Gesamtkosten des Betriebs in Höhe von DM 50.000,- verteilen sich wie folgt:

A_1	A_2	A_3
30000	10000	10000

Die Lieferungen (in Stückzahlen) sind im folgenden Schaubild dargestellt:



Ermitteln Sie bis auf den Pfennig genau die Stückkosten für die Produktion in den Abteilungen A_1, A_2 und A_3.

Aufgabe 14.27 In den Abteilungen $A_1,\ A_2,\ A_3$ werden die Produkte P_1, P_2, P_3 für den Markt produziert. Dazu beliefern sich die Abteilungen nach folgendem Schema mit Zwischenerzeugnissen: (Angaben in Stück)

nach von	A_1	A_2	A_3
A_1	0	10	10
A_2	40	0	20
A_3	20	60	0

Auf dem Markt werden 90 P_1, 70 P_2 und 80 P_3 geliefert. Die Primärkosten betragen in A_1 400 GE, in A_2 300 GE und in A_3 600 GE. Die innerbetrieblichen Verrechnungspreise für die Lieferungen aus den Abteilungen A_1 und A_2 seien jeweils halb so hoch wie die Marktpreise für P_1 bzw. P_2. Die Abteilung A_3 bekommt ihre Lieferungen nur für ein Viertel des Preises für P_3 bewertet.

Berechnen Sie die Marktpreise für die Produkte, bei denen die Bilanz jeder Abteilung ausgeglichen ist (d.h. Erlöse = Kosten). (Erwarten Sie keine glatten Zahlen.)

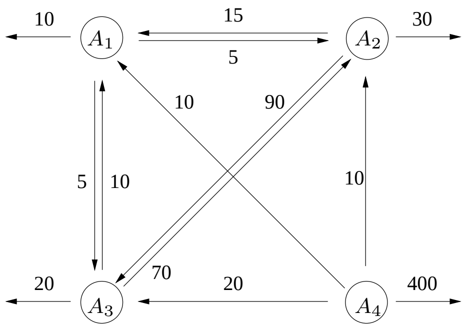
Aufgabe 14.28 Gegeben sei wieder ein Betrieb mit Abteilungen A_1, A_2, A_3, A_4. Diese beliefern einander und bringen Produkte $p_1, ..., p_4$ auf den Markt. Die Primärkosten der Abteilungen seien wie folgt gegeben:

A_1	A_2	A_3	A_4
10000	30000	20000	40000

Die betriebsinternen Verrechnungspreise sollen den Kosten entsprechen. Setzen Sie die Marktpreise so fest, daß in jeder Abteilung die realen Kosten allein durch die Lieferungen auf den Markt gedeckt sind.

Wie sieht die Bilanz dann für das Gesamtunternehmen aus?

Die Lieferungen in Stück ergeben sich wie folgt:



Aufgabe 14.29 Die Aktiengesellschaften A_1, A_2, A_3 besitzen untereinander die folgenden Anteile:

$A_i \rightarrow$ von $\uparrow$ A_j	A_1	A_2	A_3
A_1	-	20 %	10 %
A_2	40 %	-	42 %
A_3	60 %	0 %	-

Die Gesellschaften erwirtschaften im Rechnungsjahr die folgenden (Primär-) Gewinne:

A_1 20.000,- DM
A_2 8.000,- DM
A_3 60.000,- DM

Die Gesellschaften schütten ihren gesamten realen Gewinn aus. Sie besitzen einen Anteil von 5 % von A_1, 8 % von A_2 und 40 % von A_3.

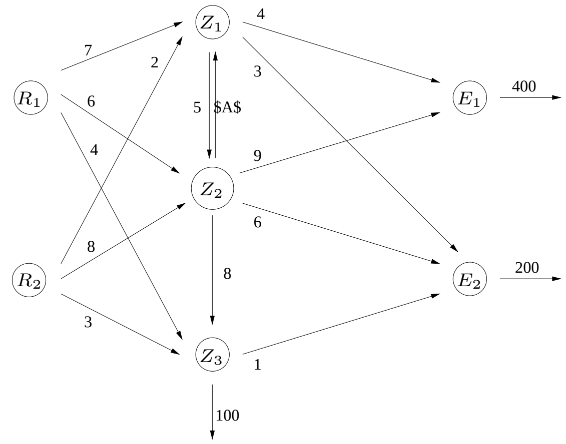
Welcher Betrag wird Ihnen gutgeschrieben?

Aufgabe 14.30 Gegeben sei der folgende Gozintograph.

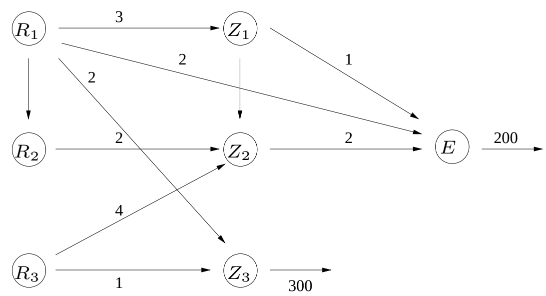
Lösen Sie das resultierende Gleichungssystem

a) für $a = 0$ und $a = 10$,

b) für beliebiges $a \in \mathbb{R}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.



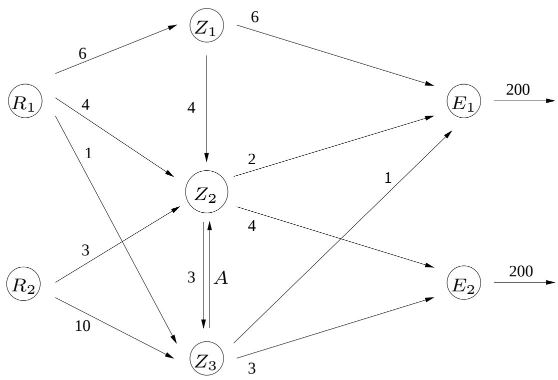
Aufgabe 14.31 Gegeben sei der folgende Gozintograph für die Teilbedarfsberechnung mit Angabe des Primärbedarfs. An Lagerbeständen sind noch 900 Einheiten R_2, 1600 Einheiten R_3 und 500 Einheiten Z_1 vorhanden.



Aufgabe 14.32 Gegeben sei der folgende Gozintograph:

a) Für welche Zahlen $A \geq 0$ gibt es eine Produktionsmöglichkeit? (Beachten Sie, daß alle Quantitäten positiv sein müssen!)

b) Geben Sie in den Fällen der Lösbarkeit den Bedarf an $R_1,\ R_2,\ Z_1,\ Z_2$ und Z_3 an.



Z_1
R_1
Z_2
R_2
Z_3
E_1
E_2
6
6
4
4
1
2
1
3
4
3
A
10
3
200
200

Kapitel 15

Rang einer Matrix

Aufgabe 15.1 Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 6 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{c)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 9 & -6 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15.2 Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$rg \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 1 \\ 5 & \lambda - 4 & 1 \\ 6 & -6 & \lambda + 3 \end{pmatrix} < 3.$$

Aufgabe 15.3 a) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$rg \begin{pmatrix} -5 - \lambda & -5 & -3 \\ 3 & 3 - \lambda & 3 \\ 5 & 5 & 3 - \lambda \end{pmatrix} < 3$$

b) Finden Sie alle

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \begin{pmatrix} -5 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Kapitel 16

Matrizeninversion

Aufgabe 16.1 Überprüfen Sie die nachfolgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} t+3 & -1 \\ 5 & t-3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

wobei $ad - bc \neq 0$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 11 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ o) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ q) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ r) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ t) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ u) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ w) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 16.2 a) Bestimmen Sie Menge aller $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die

$$A_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

b) Untersuchen Sie die Gleichung

$$A_{(a,b)} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

Aufgabe 16.3 Für welche Werte a hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} -4 & (-1-a) & a & -\frac{2}{3} \\ 4 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & a \end{pmatrix}$$

<u>keine</u> Inverse?

Aufgabe 16.4 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ aus, für die gilt

$$Ax_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Ax_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Ax_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16.5 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie die Gleichungen:

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}; Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}; Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.6 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Matrix X mit

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 16.7 Gegeben sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Man berechne a^{-1}

ii) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b' = (1, 1, -1, 2)$

Kapitel 17

Lineare (Un-)Abhängigkeit, Basen

Aufgabe 17.1 Bestimmen Sie eine Basis des von

a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugten Untervektorraumes V.

b) Entscheiden Sie, ob

$$w = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

in V liegt.

Aufgabe 17.2 Bestimmen Sie aus den nachfolgenden Vektoren alle Kombinationen von jeweils drei linear unabhängigen Vektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_5 = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.3 Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$, daß $\{v_1, v_2, v_3\}$ enthält.
[Hinweis: Das ist ganz einfach!]

b) Finden Sie eine Basis des $\mathbb{R}^4$, die $\{v_1, v_2, v_3\}$ enthält.

Aufgabe 17.4 Untersuchen Sie, ob folgende Vektoren linear unabhängig sind:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $(2, 1, 0);\ (4, 0, 6);\ (1, 1, 1)$

g) $(-1, -1, 0);\ (1, 0, 1);\ (0, 0, 1)$

h) $(1, -1, 1);\ (4, 3, 1);\ (-2, 2, -2)$

i) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} +3 \\ -2 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 17.5 Rechnen Sie nach, daß die Vektoren

a)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 36 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

b) Bestimmen Sie die 3×3 Matrix A mit der Eigenschaft

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 17.6 Untersuchen Sie die nachfolgend aufgeführten Vektoren auf lineare Unabhängigkeit und ergänzen Sie eine Basis des erzeugten Unterraumes zu einer Basis des $\mathbb{R}^n$.

a) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

c) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ 19 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

d) $$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

e) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \\ +2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 17.7 Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Die Vektoren $u + 2v$, $9u + 7v$ und $u - 2v + w$ sind linear unabhängig.

Aufgabe 17.8 a) Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 40 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 60 \\ -57 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ -39 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, daß (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und stellen Sie den Vektor

$$w = \begin{pmatrix} 7900 \\ 4000 \\ 1600 \\ 6500 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der v_i dar.

b) Es seien

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man zeige, daß $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und stelle den Vektor

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination der x_i dar.

Aufgabe 17.9 Geben Sie für die folgenden Gleichungssysteme eine Basis des Lösungsraumes und eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge an:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & - & 2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} 6x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & - & 3x_4 & & & = 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & & & = 0 \\ -x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ 5x_1 & & & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & = 0. \end{array}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 17.10 Bestimmen Sie aus den nachfolgenden Vektoren eine Basis für den erzeugten Unterraum und stellen Sie die übrigen Vektoren als Linearkombination von Basisvektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \\ 29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 4 \\ -19 \\ -46 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \\ 24 \\ 61 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 17.11 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Sei $W = \{A \cdot x,\ x \in \mathbb{R}^3\}$.

a) Zeigen Sie, daß W ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Basis von W und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 17.12 Seien

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$w^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad w^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, daß (v^1, v^2, v^3) und (w^1, w^2, w^3) Basen des $\mathbb{R}^3$ sind.

b) Stellen Sie w^1, w^2 und w^3 als Linearkombination von $\{v^1, v^2, v^3\}$ dar.

Aufgabe 17.13 Ergänzen Sie zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 17.14 Zeigen Sie:

$$\{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid$$
$$y_1 = 7x_1 - 2x_3,\ y_2 = 9x_2 + x_1,\ y_3 = x_1 + x_2,\ y_4 = x_1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$.

Geben Sie ein Erzeugendensystem an, daß aus 3 Vektoren besteht.

b) Gibt es ein EZS, das nur 2 Vektoren enthält?

Aufgabe 17.15 a) Es seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Kombinationen von jeweils 3 Vektoren aus $\{v^1, v^2, v^3, v^4\}$, die linear unabhängig sind und stellen Sie jeweils den vierten als Linearkombination der übrigen 3 dar.

b) Untersuchen Sie die Vektoren $v^1 = (1, 2, -1, 2)$, $v^2 = (1, 1, 3, 1)$, $v^3 = (0, 2, -1, 2)$, $v^4 = (2, -1, -1, 0)$ auf lineare Abhängigkeit. Stellen Sie $w = -(1, 3, 7, 6)$ als Linearkombination von v^1, v^2, v^3 und v^4 dar.

Aufgabe 17.16 a)] Stellen Sie den O-Vektor durch zwei verschiedene Linearkombinationen der Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

dar. b)] Finden Sie einen Vektor $w \in \mathbb{R}^4$, so daß $\{v_1, v_2, v_4, w\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 17.17 Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

x_1	x_2	x_3	x_4	b
1	1	1	2	0
3	5	4	5	0
2	4	3	3	0
-4	-36	-20	8	0

a) Man gebe eine Parameterdarstellung des Lösungsraumes an und berechne eine Basis des Lösungsraumes.

b) Man ergänze die gefundene Basis des Lösungsraums zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 17.18 Seien U_1, U_2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Man zeige:

i) $U = U_1 \cap U_2$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

ii) $S = U_1 + U_2 := \{x = u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1,\ u:2 \in U_2\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 17.19 Man untersuche die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ auf lineare Unabhängigkeit:

a)

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b)

$$x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Man schreibe den Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der x_i aus a) bzw. b), falls möglich.

Aufgabe 17.20 Man untersuche die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^4$ auf lineare Unabhängigkeit:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ -18 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Man berechne die Dimension der von den Vektoren in a) bzw. b) aufgespannten Untervektorräume.

Aufgabe 17.21 Für welche $a \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a^2+1)x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ (2-2a^2)x_1 - x_2 + (a^2-4)x_3 &= 0 \\ (3a^2-1)x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

zwei linear unabhängige Lösungen? Man finde diese Lösungen.

Aufgabe 17.22 Sei U der von den Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Man berechne eine Basis von U.

Aufgabe 17.23 Untersuche, ob die angegebenen Mengen Untervektorräume, bzw. affine Unterräume sind oder nicht.

a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z^2\}$

b) $B = \{(u, v, w, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 2n - 3w = 1,\ z - v = 0\}$

c)
$$C = \left\{ x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{rl} x - y + 2z &= 0 \\ 6x - y &= 0 \end{array} \right\}$$

d) Seien $u_1, \cdots u_n \in \mathbb{R}^m$ festgewählte Vektoren

$$D = \left\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = 0 \right\}$$

Aufgabe 17.24 Für welche Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

sind die Vektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig?

Aufgabe 17.25 Welche der nachfolgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ sind Untervektorräume:

a) $\{(a, a, b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(a, a^2, a^3),\ a \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(3a + 4b,\ 6b,\ 3b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Geben Sie in geeigneten Fällen ein Gleichungssystem an, das die angegebenen Teilmengen als Lösungsmengen besitzt.

Aufgabe 17.26 a) Bestimmen Sie aus den nachfolgenden Vektoren alle Kombinationen von linear Unabhängigen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix};\ v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

b) Stellen Sie v_5 als Linearkombination von v_1 und v_2 dar.

Kapitel 18

Lineare Abbildungen

Aufgabe 18.1 Sei A eine $m \times n$ Matrix, sei Bild $(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ und Ker $(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$. Man zeige: Bild (A) und Ker (A) sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 18.2 Es sei

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis für Bild (B).

Aufgabe 18.3 A) Es sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6x_1 - 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 - 3x_3 + 6x_4)$$

a) Zeigen Sie: f ist linear.

b) Bestimmen Sie eine Basis von Ker $(f) = \{x \in \mathbb{R}^4,\ f(x) = 0\}$.

c) Bestimmen Sie eine Basis von Bild $(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^3,\ x \in \mathbb{R}^4.\}$.

B) Überprüfen Sie die nachfolgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ auf Linearität. Bestimmen Sie eine Basis von Ker$(f) = \{x \in \mathbb{R}^m,\ f(x) = 0\}$, eine Basis von Bild $(f) = \{f(x) \in \mathbb{R}^n,\ x \in \mathbb{R}^m\}$ und geben Sie Parameterdarstellungen dieser Räume an.

a)
$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (6x_1 - 2x_2, x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_1 - 3x_3 + 6x_4)$$

b)
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3)(x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_1)$$

c)
$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4,\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4,\ 3x_1 + x_2 + x_4)$$

d)
$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (8x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4,\ 3x_3 + x_4,\ 2x_3 - 6x_1 + 12x_2)$$

Aufgabe 18.4 a) Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (x+y,\ 3x-4y+z,\ z-y) \end{array}$$

ist linear.

b) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung von f in der Basis

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Geben Sie die Transformationsmatrix von der Standardbasis zur Basis (e_1, e_2, e_3) explizit an.

Aufgabe 18.5 Es sei $x \in \mathbb{R}$,

$$A(x) = \begin{pmatrix} -9-x & 6 & 0 \\ -13 & 8-x & 1 \\ -22 & 14 & 1-x \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis von Ker $A(0)$.

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die Ker $A(x) \neq \{0\}$.

Aufgabe 18.6 Es sei

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bezüglich der Standardbasis in Quelle und Ziel.

a) Zeigen Sie: Die Vektoren

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}; \quad v^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis (v^1, v^2, v^3) in Quelle und Ziel.

Aufgabe 18.7 Es sei

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1, x_2) & \longrightarrow & (x_2, ax_1 + bx_2). \end{array}$$

a) Rechnen Sie nach, daß f linear ist.

b) Es sei $\dfrac{a^2}{4} + b > 0$. Finden Sie alle Vektoren $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, für die $f(x_1, x_2) = c(x_1, x_2)$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 18.8 Es sei

$$A(2) = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} - \lambda & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{6} - \lambda & \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{2} - \lambda \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ für die Ker $(A(\lambda)) \neq \{0\}$.

Aufgabe 18.9 Welche der nachfolgenden Funktionen ist linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 7x^2+3x \end{array}$$

b) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & 2x+6 \end{array}$$

c) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1,x_2) & \longrightarrow & (x_2, 6x_1+\frac{1}{10}x_2) \end{array}$$

d) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longrightarrow & x_1+x_2 \end{array}$$

e) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,w) & \longrightarrow & (x, x+y+z, 3y+4z+9w) \end{array}$$

f) $$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (z-x, 0, 3z) \end{array}$$

Aufgabe 18.10 a) Zeigen Sie: Die Vektoren

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v^3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear mit

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie die Matrix von f auf

b1) bezüglich der Standardbasis in Quelle und Ziel,

b2) bezüglich der Basis (v^1, v^2, v^3) in Quelle und Ziel, b3) bezüglich der Standardbasis in der Quelle und der Basis (v^1, v^2, v^3) im Ziel.

Aufgabe 18.11 Seien $u = (1, 1, 1),\ v = (2, 1, 0),\ w = (1, 0, 1)$ Vektoren aus $\mathbb{R}^3$.

i) Zeigen Sie, daß u, v, w linear unabhängig sind.

ii) Drücken Sie die Vektoren $e^1 = (1, 0, 0),\ e^2 = (0, 1, 0)$ und $e^3 = (0, 0, 1)$ der Standardbasis als Linearkombinationen von u, v, w aus.

iii) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die gilt

$$f(u) = e^1,\ f(v) = e^2,\ f(w) = e^3.$$

iv) Bestimmen Sie die Matrix der Umkehrabbildung $f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 18.12 Gegeben sei die Matrix

$$\text{a)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{c)}\ A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie Parameterdarstellungen für Ker (A) und Bild (A) an.

Aufgabe 18.13 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ -4 & -36 & -20 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von Ker (A).

b) Bestimmen Sie eine Basis von Bild (A) und ergänzen Sie diese gegebenenfalls zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 18.14 Es sei

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 7t_1 \\ t_1 + t_2 \\ 6t_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

a) Zeichnen Sie V.

b) Geben Sie bitte ein lineares Gleichungssystem an, das V als Lösungsmenge besitzt.

c) Finden Sie eine Parameterdarstellung für V.

Aufgabe 18.15 Sei $U = V = \mathbb{R}^2$, $f : U \to V$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

und $B = \left\{ \binom{1}{7}, \binom{6}{1} \right\}$, $B' = \left\{ \binom{1}{0}, \binom{1}{1} \right\}$.

a) Rechnen Sie nach, daß B und B' Basen des $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Zeichnen Sie die Vektoren aus B und B'.

c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis B in der Quelle und B' im Ziel.

Aufgabe 18.16 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3 - 2x_1 \\ x_1 + 6x_2 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 \end{pmatrix}$$

a) Rechnen Sie nach, daß f linear ist.

b) Seien

$$v^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad w^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w^3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie nach, daß $B = (v^1, v^2, v^3)$ und $B' = (w^1, w^2, w^3)$ Basen des $\mathbb{R}^3$ sind.

c) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis B in der Quelle und B' im Ziel.

Aufgabe 18.17 Es seien a, b, c reelle Zahlen.

i) Rechnen Sie nach, daß

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

genau dann gilt, wenn $b \cdot c \leq 1$ und $a = \pm\sqrt{1 - b \cdot c}$.

ii) Zeichnen Sie $M = \left\{ \binom{b}{c} \in \mathbb{R}^2;\ b \cdot c \leq 1 \right\}$ in der Ebene.

Aufgabe 18.18 Sei

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} 7x_1 - 2x_3 \\ 9x_2 + x_1 \\ x_1 + x_2 + x_4 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Geben Sie eine Basis von Bild (f) an.

Aufgabe 18.19 Sei

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \longrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ 2x_4 + 9x_2 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, daß f linear ist.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix (bezüglich der Standardbasen) an.

c) Bestimmen Sie Ker (f).

Aufgabe 18.20 Rechnen Sie nach, daß die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ Untervektorräume sind und geben Sie ein Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge die gegebene Menge ist.

i) $V = \{(t_1 + t_2, 7t_1, 3t_2) \in \mathbb{R}^3,\ t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$.

ii) $V = \{(a + b + c, 0, 0) \in \mathbb{R}^3,\ a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 18.21 Es seien

$$\begin{array}{llcc} \psi: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (x+y-z, x+z, y+z) \\ \text{und} & & & \\ \psi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & (z_1,z_2,z_3) & \longrightarrow & (z_1+2z_3, z_2-z_1, z_3+z_2, z_3). \end{array}$$

Bestimmen Sie die Matrix der zusammengesetzten Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^4.$$

Aufgabe 18.22 Sei

$$T := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \; x_1 = t_1 + t_2, \; x_2 = t_1 + t_2 + t_3, \right.$$
$$\left. x_3 = 0; \; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man prüfe, ob T ein Vektorraum ist und gebe gegebenenfalls ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsraum T ist.

Aufgabe 18.23 Gegeben sind die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

a) $T_1 := \{ \begin{pmatrix} t_1+t_2+1 \\ t_2+t_3+4 \\ t_1-t_3+2 \end{pmatrix} \mid t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}$

b) $T_2 := \{ \begin{pmatrix} t_1-2t_2+5 \\ 2t_2-3t_3 \\ t_3 \end{pmatrix} \mid t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}$

c) $T_3 := \{ \begin{pmatrix} t_1+3t_3+2 \\ 0 \\ t_2+2t_1 \end{pmatrix} \mid t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}$

d) $T_5 := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3-2t_3 \end{pmatrix} \mid t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}\}.$

Man stelle die T_i als Lösungsräume linearer Gleichungssysteme dar, falls dies möglich ist.

Kapitel 19

Determinanten

Aufgabe 19.1 Berechnen Sie die Determinante

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -6 & 3 \\ -4 & 1 & 9 & -3 \\ -1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 7 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ j) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

k) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 0 & 18 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$

o) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 8 \\ 6 & 9 & 1 & 13 \\ 8 & 11 & 0 & 15 \\ 12 & -3 & 7 & 20 \end{pmatrix}$ p) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

q) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ r) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

s) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 4 & 8 & 16 & 32 & 16 \\ 8 & 16 & 32 & 16 & 1 \\ 16 & 32 & 16 & 7 & 9 \\ 32 & 16 & 2 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ t) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

u) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ v) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 16 \\ 4 & 4 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 54 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

w) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} & \frac{1}{81} & \frac{1}{243} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Hinweis: Das Ergebnis lautet:

$(\frac{1}{2} - 2)(3 - 2)(\frac{1}{3} - 2)(1 - 2)(-1 - 2) \bullet (3 - \frac{1}{2})(\frac{1}{3} - \frac{1}{2})$

$(1 - \frac{1}{2})(-1 - \frac{1}{2})(\frac{1}{3} - 3)(1 - 3)(-1 - 3)(1 - \frac{1}{3})(-1 - \frac{1}{3})(-1 - 1).$

x) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \pi & e \\ 0 & 0 & 4 & 2,9 & 18 & 37 \\ 0 & 5 & \sqrt[3]{19} & 97 & \frac{1}{18} & 207 \\ 6 & 1n2 & \sin 87^0 & \cos 3^0 & \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$ y) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

z) $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 19.2 Sei $A = (a_{ij})_{(20,20)}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 7 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

Berechnen Sie $\det(A)$ und begründen Sie Ihre Vorgehensweise.
Hinweis: Addieren Sie zuerst alle Zeilen zur ersten Zeile.

Aufgabe 19.3 Überprüfen sie die nachfolgenden Matrizen auf Definitheit:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 6 \\ 10 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \\ -9 & 1 & 18 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

m) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ n) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ o) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

p) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ q) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -8 \end{pmatrix}$

Aufgabe 19.4 Lösen Sie mit Hilfe der Cramerschen Regel (und <u>keinem</u> anderen Verfahren) folgendes lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & +3x_3 & -5x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Aufgabe 19.5 Es sei

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}, & -\sqrt{\frac{8}{9}}, & 0 \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{\sqrt{18}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3}, & \frac{1}{\sqrt{18}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

a) Berechen sie die inverse Matrix A^{-1}.

b) Bestimmen Sie die adjungierte Matrix A^*.

c) Berechnen Sie $\det(A)$ und bestimmen Sie $\det(A^*)$.

Aufgabe 19.6 Bestimmen Sie die adjungierte Matrix von

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 19.7 Zeigen Sie

$$Det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ c & c & d & d \\ e & e & e & f \end{pmatrix} = (b-a)(d-c)(f-e).$$

Aufgabe 19.8 Berechnen Sie die Determinante:

a) $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a^2 & a^3 & a \\ a^3 & a & a^2 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 \\ a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^4 \\ a^3 & a^4 & a^5 & a^4 & a^3 \\ a^4 & a^5 & a^4 & a^3 & a^2 \\ a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a \end{pmatrix}$

c) Zeigen Sie die Gleichung:

$$Det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{l} ((a_n - a_1)(a_{n-1} - a_1)\cdots(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) \\ \cdot((a_n - a_2)(a_{n-1} - a_2)\cdots(a_4 - a_2)(a_3 - a_2))\cdots((a_n - a_{n-1})) \end{array}$$

Hinweis:

(1) Die rechte Seite der Gleichung kann man auch als $\prod\limits_{n \geq k > l} (a_k - a_1)$ schreiben.

(2) Zur Berechnung der Determinante addiere man zuerst das a_1-fache der $(n-1)$-ten Spalte zur n-ten Spalte, sodann das a_1-fache der $(n-2)$-ten Spalte zur $(n-1)$-ten ...
Danach subtrahiere man die neue erste Zeile von den Nachfolgenden.
Dann kann man $(a_n - a_1)\cdots(a_2 - a_1)$ als Faktor aus der Determinante ziehen.
Auf den Rest wende man Induktion an.

Aufgabe 19.9 Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Untersuchen Sie die Gleichungen

$$Ax = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Ax = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ und } Ax = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

auf Lösbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

Aufgabe 19.10 Es seien

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

i) Man berechne $u^t Hu, v^t Hv$.

ii) Man begründe, daß H indefinit ist (weder positiv noch negativ semidefinit).

Kapitel 20

Eigenwerte und Eigenvektoren

Aufgabe 20.1 Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 13 & 4 & 2 \\ 4 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20.2 Bestimme Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

a) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 3 & 17 & \frac{21}{2} \\ 7 & \frac{21}{2} & \frac{49}{2} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ -6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Aufgabe 20.3 Sei $\phi \in [0, 2\pi]$

a) Zeigen Sie:
$$A = \begin{pmatrix} \cos\ \phi, & -\sin\ \phi \\ \sin\ \phi, & \cos\ \phi \end{pmatrix}$$
ist eine orthogonale Matrix.

b) Für welche Winkel $\phi \in [0, 2\pi]$ besitzt A reelle Eigenwerte?

Aufgabe 20.4 Sei A eine (n, n) Matrix und $E_{(n,n)}$ die Einheitsmatrix und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie durch Induktion

$$\det(a - \lambda E)$$

ist ein Polynom vom Grade n in λ.

Aufgabe 20.5 Es sei A eine $n \times n$ Matrix. Eine Folge von Vektoren $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}^n$ heißt Lösung der Differenzengleichung $x \to Ax$, wenn $x_{n+1} = Ax_n$. Eine Lösung heißt Eigenlösung, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $x_{n+1} = \lambda x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \text{ und } \frac{a^2}{4} + b > 0.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenverktoren von A. item[b)] Bestimmen Sie die Eigenlösungen und rechnen Sie nach, daß jede Lösung Linearkombination von Eigenlösungen ist.

Aufgabe 20.6 Es sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 16 & 2 \\ 16 & 16 & 2 \\ 2 & 2 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Geben Sie eine Basis für $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.

Kapitel 21

Differenzengleichungen zweiter Ordnung

Aufgabe 21.1 Bestimmen Sie die Lösungen der nachfolgenden Differenzengleichungen 2ter Ordnung

a) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 3$, $a_0 = 0,\ a_1 = 1$

b) $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, $a_0 = 2,\ a_1 = -1$

c) $a_{n+1} = 3a_n + \frac{7}{4}a_{n-1} + 6$, $a_0 = 0,\ a_1 = 1$

d) $a_{n+1} = 3a_n + \frac{9}{4}a_{n-1} + 4$, $a_0 = 3,\ a_1 = 2$

e) $a_{n+1} = -\frac{8}{5}a_n - \frac{16}{25}a_{n+1} + 1$, $a_0 = 10,\ a_1 = 0$

f) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} + 10$, $a_0 = a_1 = 10$

g) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_{n-1} + 10$, $a_0 = 1,\ a_1 = 0$

h) $a_{n+1} = a_n - \frac{3}{16}a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1,\ a_1 = 10$

i) $a_{n+1} = 1,8a_n - 0,9a_{n-1}$, $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

j) $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$, $a_0 = 1,\ a_1 = 3;\ [a_0 = 1,\ a_1 = 2]$

k) $a_{n+1} = 2,5a_n - 1,5a_{n-1}$, $a_0 = 1,\ a_1 = 3$

l) $a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}$, $a_0 = 5,\ a_1 = 1$

m) $a_{n+1} = a_n - 2a_{n-1} - 3$, $a_1 = 1,\ a_2 = 2$

n) $a_{n+1} = 2a_n - 4a_{n-1} + 3$, $a_{11} = 2049,\ a_{19} = 262145$

o) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} + 2$, $a_3 = 4,\ a_6 = 2$

p) $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1,\ a_2 = 1$

q) $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{4}a_{n-1}$, $a_{10} = 0,\ a_{11} = 0$

r) $a_{n+1} = 1,97a_n - 0,99a_{n-1}$, $a_0 = 1,\ a_1 = 2$

s) $a_{n+1} = 2,1a_n - 1,1a_{n-1}$, $a_0 = 1,\ a_1 = 2$

t) $a_{n+1} = 0,9a_n - 0,81a_{n-1}$, $a_1 = 0,45,\ a_2 = 0,405$

u) $a_{n+1} = 0,9a_n - 0,81a_{n-1}$, $a_{17} = a_{18} = 1$

v) $a_{n+1} = 3a_n - \frac{9}{4}a_{n-1} + 4$, $a_0 = 3,\ a_1 = 2$

w) $a_{n+1} = -\frac{6}{5}a_n - \frac{16}{25}a_{n-1} + 1$, $a_0 = 10,\ a_1 = 0$

Aufgabe 21.2 Untersuchen Sie die in Aufgabe 1 gefundenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 21.3 Es sei

$$a_{n+1} = a_n - \frac{3}{16}a_{n-1} + 3\ ; \qquad a_0 = 1,\ a_1 = 10.$$

Geben Sie die Folge a_n explizit an und finden Sie $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\mid a_n - 16 \mid < \frac{1}{10}$ für jede natürliche Zahl größer gleich n_0.

Aufgabe 21.4 a) Es sei $t \in \mathbb{R}$

$$a_{n+1} = t^2 a_n - t a_{n-1}, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 2.$$

Bestimmen Sie als Funktion von t die Werte a_{15}.

b) Es sei $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ und es gelte die Differenzengleichung

$$a_{n+1} = ta_n - ta_n \text{ mit } a_0 = 0 \text{ und } a_1 = 1.$$

Bestimmen Sie als Funktion von t die Werte a_{10}.

Aufgabe 21.5 Ein Vorgang folgt dem Gesetz:

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n + 2 \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Empirisch haben Sie $x_{10} = 500$ und $x_{12} = 20$ ermittelt.
Bestimmen Sie x_0.

Aufgabe 21.6 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle die Gleichungen

$$a_{n+1} = \begin{cases} 4a_n + 9 & \text{für} n \leq 9 \\ 4a_n - \dfrac{25}{4}a_{n-1} + 10 & \text{für } n \geq 10. \end{cases}$$

Es sei $a_0 = -3$.
Man bestimme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explizit.

Aufgabe 21.7 Lösen Sie folgenden Differenzengleichungen und geben Sie die Werte von a_{30} und a_{50} an:

$$a_{n+1} = 0,9a_n + 0,5 \qquad \text{mit } a_4 = 18,122$$

$$a_{n+1} = 0,9a_n - 0,81a_{n-1} \qquad \text{mit } a_0 = 1 \text{ und } a_1 = 0,45$$

Aufgabe 21.8 Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genüge den folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2a_{n+1} - a_n + 2 && \text{für } n \leq 10 \\ a_{n+2} &= a_{n+1} - a_n + 10 && \text{für } n \geq 11 \end{aligned}$$

Es sei ferner $a_0 = 0$ und $a_2 = 2$.
Bestimmen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ explizit und geben Sie a_{723} an.

Aufgabe 21.9 Für die Folge S_n gelte: $S_0 = 1,\ S_1 = 1,5$.

$$\begin{aligned} & S_{n+1} = \frac{3}{2}S_n - \frac{1}{2}S_{n-1} + \frac{1}{2} && \text{falls } n \leq 5 \\ \text{und} \quad & S_{n+1} = S_n - \frac{1}{2}S_{n-1} && \text{falls } n \geq 6. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie S_n explizit für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie S_{12} und S_{24}.

Aufgabe 21.10 Eine Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ erfülle die Gleichungen:

$$\begin{array}{lrcll} & a_{n+2} & = & 2a_{n+1} + 8a_n + 9 & \text{für } n \leq 100 \\ \text{und} & & & & \\ & a_{n+1} & = & 3a_n + 2 & \text{für } n \geq 102. \end{array}$$

Es sei $a_2 = -1$ und $a_3 = -1$.
Bestimmen Sie die Folge $\{a_n\} n \in \mathbb{N}$ explizit und berechnen Sie a_{153}.

Aufgabe 21.11 Untersuchen Sie das langfristige Verhalten der Lösungen der Differenzengleichungen

$$a_{n+1} = 2a_n - (1+\varepsilon)a_{n-1}; \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

für betragsmäßig kleine ε.

Aufgabe 21.12 Es sei $S_n = K_n + I_n,\ K_{n+1} = \dfrac{15}{16} S_n, I_{n+1} = \dfrac{9}{16}(S_n - S_{n-1})$.
Es sei $S_0 = 1,\ S_1 = \dfrac{17}{16}$.

a) Bestimmen Sie die Folgen $S_n,\ K_n$ und I_n.

b) Zeigen Sie $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert S.

c) Geben Sie ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so daß $\mid S_n - S \mid < \dfrac{1}{3}$ für alle $n \geq n_0$.

d) Zeichnen Sie die Folge S_n bis auf eine Genauigkeit von $\dfrac{1}{3}$.

Aufgabe 21.13 Ein Unternehmen habe das Ziel, die Lagerbestände möglichst konstant zu halten. Bezeichnet L_n die für das Jahr n vorgesehene Produktion für das Lager, so gilt $L_n = W_{n-1} - V_{n-1},\ n \geq 1$. Dabei ist W_{n-1} der reale Verkauf im Jahre $n-1$ und V_{n-1} der geplante Verkauf im Jahre $n-1$. Für den Verkauf im Jahre n werde der reale Verkauf im Jahre $n-1$ vorgesehen, d.h. $V_n = W_{n-1}$. Produziert wird demnach im Jahre $n : P_n = V_n + L_n$. Der Wert eines produzierten Gutes sei K. Jährlich werde noch ein konstanter Betrag I investiert, so daß das Unternehmen ein Gesamteinkommen $G_n = K \cdot P_n + I$ repräsentiert.
Nun sei der reale Verkauf proportional zum Gesamteinkommen, d.h.: b
$W_n = b \cdot G_n$(mit $0 < b \cdot K < 1$).

a) Geben Sie die allgemeinen Lösungsfolgen V_n und L_n an.

b) Bestimmen Sie den **Lagerbestand** l_n am Ende des Jahres n.

c) Vergleichen Sie V_{30} (l_{30}) und V_{70} (l_{70}) für $K = 2,\ b = \frac{3}{8},\ I = 100,\ V_0 = 1000$, $V_1 = 2000$ und $l_0 = 100$.

Aufgabe 21.14 Sie stellen ein Produkt her. Es sei p_n die Produktion im Jahre n, l_n der Lagerbestand zu Beginn des Jahre n (nach Inventur) und v_n der Verkauf im Jahre n.
Von den Gütern, die sich bei Inventur auf dem Lager befinden, seien stets 75%[90%] in verkaufsfähigem Zustand. Der Rest wird weggeworfen.
Die Produktion p_n werde so geplant, daß

a) l_n verkauft werden soll,

b) 5 % [10 %] mehr Güter verkauft werden sollen, als im Vorjahr tatsächlich verkauft wurden und daß

c) über den so ermittelten Bedarf hinaus zur Sicherheit noch 500 [1000] Einheiten hergestellt werden.

Was nicht verkauft wird, wird gelagert. Der Verkauf betrage 90%[95%] der Produktion. Es sei $p_0 = 10\ [p_0 = 0],\ p_1 = 5000\ [p_1 = \frac{10000}{81}]$. Wie verläuft unter diesen Annahmen die Produktion?

Aufgabe 21.15 Es sei B_n die Anzahl der Beschäftigten im Jahre $n,\ N_n$ die Nachfrage nach Konsumgütern. Es gelte $B_n = \frac{1}{2}N_{n-1}$ und $N_n = \frac{3}{2}B_n + 10$ mit $N_0 = 20$.

a) Bestimmen Sie B_n und N_n.

b) Konvergieren die Folgen B_n und N_n?

c) Wie groß ist B_{31}?

Aufgabe 21.16 Sie möchten eine Molkerei übernehmen. Der bisherige Eigentümer erzählt Ihnen, daß die Jahresproduktion an Butter stets zu 90% verkauft werden kann. Der Lagerbestand an Butter betrug zu Jahresanfang

100 t und im gerade laufenden Jahr werden 1000 t Butter hergestellt. Sie planen eine jährliche Verkaufssteigerung bei Butter um 10%. In den Verkauf möchten Sie jedes Jahr 20% der Altbestände geben. Was nicht verkauft wird, wird gelagert.

a) Wie verläuft unter diesen Annahmen die Produktion?

b) Wie verläuft die Produktion, wenn Sie $v_n = 0,9p_n$ zu $v_n = p_n$ verbessern können?

Aufgabe 21.17 a) Ein Betrieb stellt ein Produkt her. Sei p_n die Produktion im Jahre n,
l_n der Lagerbestand zu Beginn des Jahres n und v_n der reale Verkauf im Jahre n.
Zeigen Sie:

$$(1) \quad l_n = p_{n-1} - v_{n-1} + l_{n-1} \text{ für } n \geq 1.$$

b) Bei der Produktionsplanung geht der Betrieb davon aus, daß im Jahre n so viel verkauft wird wie im Vorjahr. Gleichzeitig will er seinen Lagerbestand auf die Hälfte reduzieren.
Zeigen Sie: Es gilt dann

$$(2) \quad p_n = v_{n-1} - \frac{1}{2} l_n \text{ für } n \geq 1.$$

c) Wir wollen annehmen, daß tatsächlich nur jeweils 80% der Produktion verkauft, d.h.

$$(3) \quad v_n = 0,8p_n \text{ für } n \geq 0$$

und die überschüssige Produktion gelagert wird.
Zeigen Sie:

$$(4) \quad p_n = 1,7p_{n-1} - 0,8p_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Hinweis: Setzen Sie zuerst (1) und (2) ein, benutzen Sie dann (2) noch einmal mit verschobenem Index und anschließend (3).

d) Lösen Sie die Differenzengleichung (4) zu den Anfangswerten:

$l_0 = 0, \ p_o = 1.$

Hinweis: Den Wert p_1 können Sie aus (1), (2), (3) berechnen.

Aufgabe 21.18 Es sei C_n der Konsum im Jahre $n \in \mathbb{N}$ und I_n seien die Investitionen im gleichen Jahr. Für das Sozialprodukt gelte: $Y_n = I_n + C_n$. Geben Sie die Folge Y_n explizit an und berechnen Sie die Grenzwerte von Y_n, C_n und I_n.

a) $C_n = \frac{15}{16}Y_{n-1}; \quad I_n = \frac{9}{16}(Y_{n-1} - Y_{n-2}); \quad Y_0 = 1,\ Y_1 = \frac{17}{16}$

b) $C_n = \frac{1}{2}Y_{n-1}; \quad I_n = \frac{4}{5}Y_{n-1} - Y_{n-2} + 10; \quad Y_0 = 1000,\ Y_1 = 800$

c) $C_n = \frac{2}{3}Y_{n-1}; \quad I_n = \frac{(}{Y_{n-1}} - Y_{n-2}); \quad Y_0 = 2,\ Y_1 = 10;\ (Y_0 = 1, Y_1 = 100)$

Aufgabe 21.19 In einer Konföderation zweier Länder A und B hängen die Sozialprodukte $S_A(n)$ von A und $S_B(n)$ von B im Jahre n von dem des Partnerlandes ab.
Es gelte die Gesetzmäßigkeit

1. $S_A(n) = \frac{2}{3}S_A(n-1) + \frac{1}{3}S_B(n-1) \qquad \forall n \geq 1$

2. $S_B(n) = \frac{2}{3}S_B(n-1) + \frac{1}{3}S_A(n-1) \qquad \forall n \geq 1$

a) Formen Sie diese Gleichungen in die Differenzengleichungen

   3. $S_A(n) = \frac{4}{3}S_A(n-1) - \frac{1}{3}S_A(n-2)$
   4. $S_B(n) = \frac{4}{3}S_B(n-1) - \frac{1}{3}S_B(n-2)$ um.
   (Hinweis: Setzen Sie (2) in (1) ein und benutzen Sie außerdem (1) ein zweites Mal, wobei n durch $n-1$ ersetzt ist.)

   b) Das Sozialprodukt von A im Jahre 0 sei Maßeinheit, also $S_A(0) = 1$. Verglichen damit sei $S_B(0) = 2$.
   Ermitteln Sie $S_A(1),\ S_A(2),\ S_B(1),\ S_B(2)$.

   c) Lösen Sie die Differenzengleichungen (3) und (4) unter den in (b) gegebenen bzw. ermittelten Anfangsbedingungen (dafür brauchen Sie (a) nicht gelöst zu haben) und berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} S_A(n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} S_B(n)$$

Aufgabe 21.20 a) Bestimmen Sie die Lösungsfolgen folgender Differenzengleichungen.

b) Geben Sie die Werte von a_3, a_6, a_9, a_{12} an.

c) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

d) Ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(1) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ mit $a_0 = 1$

(2) $a_{n+1} = a_n - a_{n-1} + 1$ mit $a_0 = 2, a_1 = 1,5$

(3) $a_{n+1} = 3a_n + 4 \cdot a_{n-1} + 18$, $a_0 = -3, a_1 = -3$

(4) $a_{n+1} = 6a_n + 16a_{n-1} + 9$, $a_0 = 0, a_1 = 1$

Aufgabe 21.21 Sie stellen Waren her, besitzen ein Lager und Kapital. Zu Beginn eines jeden Jahres n legen Sie die Produktion P_n (gemessen in Mark) neu fest. Diese wird eingeteilt in die Waren, die vermutlich zum Verkauf kommen V_n und diejenigen, die Sie vorsichtshalber auf Lager nehmen L_n. Jedes Jahr geben Sie eine feste Menge Geld M für den Einkauf von Vorprodukten, Produktionsverbesserung und Werbung aus, so daß Sie ein "Gesamteinkommen" $Y_n = V_n + L_n + M$ erwirtschaften werden. Nun sei Ihnen aus langjähriger Erfahrung bekannt, daß die tatsächlichen Verkäufe R_m im Jahre m stets einen festen Bruchteil a des Einkommens Y_m ausgemacht haben. Es erscheine Ihnen vernünftig V_n als genauso groß wie den realen Verkauf R_{n-1} des letzten Jahres zu setzen. Auf Lager produzieren Sie die Differenz von realem und geplanten Verkauf des Vorjahres:

$$L_n = R_{n-1} - V_{n-1}.$$

Nun sei $a = \frac{3}{4}$ und $Y_0 = 3M, Y_1 = 2M$.
Untersuchen Sie die Folge Y_n auf Konvergenz, sodann die Folgen V_n, L_n und interpretieren Sie das Ergebnis.

Kapitel 22

Stetigkeit bei Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 22.1 Untersuchen Sie die nachfolgenden Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in allen Punkten des $\mathbb{R}^n$.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & ; \quad (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2 - x_2^2 x_1}{x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2} & ; \quad x_1 \neq x_2 \\ 0 & ; \quad x_1 = x_2 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq 0 \\ 0 & , \quad (x,y) = 0 \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} & x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $f(x,y) = x + y$

Aufgabe 22.2 Untersuchen Sie die Funktion

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^2 & \to \qquad \mathbb{R}^2 \\ \binom{x}{y} & \to \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} y^2 \\ \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)} \end{pmatrix} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

auf Stetigkeit im Nullpunkt.

Aufgabe 22.3 Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy} & \text{falls } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Punkte im $\mathbb{R}^2$, in denen die partiellen Ableitungen von f existieren. Rechnen Sie insbesondere nach, daß f im Nullpunkt partiell differenzierbar aber nicht stetig ist.

Kapitel 23

Partielle Ableitungen

Aufgabe 23.1 Bestimmen Sie die (ersten) partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $\sin(x_1 + x_2)$

b) $a^{x_1 - x_2}$

c) $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - \sin(x_1 + x_2) + e^{x_2 + x_3}$

d) $\dfrac{x^2 y + 2 + \sin(xy)}{x^2 + 1}$

e) $(e^x + y)(x^2 + 4)$

f) $e^{xyz} + \sin^2(x + y)$

g) $\dfrac{yx^2 + y^3 x + 1}{\sin(x^2) + 2}$

h) $\cos(y^2 x + 6)$

i) $ln[(x \ \cos(y) + e^y)^2 + x^2 + y^2 + 6]$

j) $x \ \sin(y) + yxz + y^2 e^z$

k) $\dfrac{x_1^2 + x_2 x_3 + e^{x_2 \cdot \ln(x_3^2 + 1)}}{(\cos(x_1 \cdot x_2))^2 + 1}$

l) $\dfrac{x_1 \cdot x_2 \cdot \cos(x_1)}{x_1^2 + x_2^2 + 1}$

m) $x_1 \cdot e^{(x_1+x_2)} + \sin\left(x_1\sqrt{x_2^2+1}\right)$

n) $x_3^2 - x_1 x_2 + \dfrac{\cos(x_3 - x_2)}{x_1^2 + 1}$

o) $\cos(x_1 \cdot x_2^2) + x_3$

p) $x_1 + x_2^2 x_3^4$

q) $ln\left(x \cdot \sqrt{y}\right); \quad x, y > 0$

r) $7x^2 z + e^y \cos\ x$

s) $x^2 + \cos(x \cdot y)z + e^{xz}$

t) $\dfrac{x}{z^2+1} + y \sin\left(\sqrt{x^2+y^2+6}\right)$

Aufgabe 23.2 Bestimmen Sie die Nullstellen des Differentials von:

a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2^2 x_1^2$

b) $f(x_1, x_2) = x_2(3x_1^4 + 16x_1^3 + 6x_1^2 - 72x - 47)$.

c) $f(x, y) = x^3 + 12xy - 3y^2$

d) $f(x, y) = \cos\ x \cdot \sin\ y$

Aufgabe 23.3 Es sei

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \binom{x}{y} & \to & \begin{pmatrix} \cos(x) & + & y \\ x^2 & + & xy \\ e^y & + & ln(x^2+1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Ableitung von h in allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 23.4 Es seien

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & x \cdot y + z^3 \end{array}$$

und für $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{array}{rcc} g_1: \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^3 \\ t \to & \begin{pmatrix} a+t \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{rcc} g_2: \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^3 \\ t \to & \begin{pmatrix} a \\ b+t \\ c \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{rcc} g_3: \mathbb{R} \to & \mathbb{R}^3 \\ t \to & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c+t \end{pmatrix} \end{array}$$

Bestimmen Sie die zusammengesetzten Funktionen $f \circ g_i, i = 1, 2, 3$ und berechnen Sie die Ableitung im Punkte $t = 0$.

Aufgabe 23.5 Es sei

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \binom{x}{y} & \to & \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g_1: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \binom{0}{t} \end{array} \quad \begin{array}{rccc} g_2: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \binom{t}{0} \end{array} \quad \begin{array}{rccc} g_3: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \binom{t}{t} \end{array}$$

a) Bestimmen sie die Ableitung der Zusammensetzungen $f \circ g_i, i = 1, 2, 3$ im Punkte $t = 0$.

b) Es sei $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rccc} h_1(a,b): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \begin{pmatrix} a+t \\ b \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} h_2(a,b): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \to & \begin{pmatrix} a \\ b+t \end{pmatrix} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Funktion

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (a,b) & \to & \begin{pmatrix} (f \circ h_1(a,b))'|_{t=0} \\ (f \circ h_2(a,b))'|_{t=0} \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 23.6 Berechnen Sie die Komposition der Funktionen:

a)
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \rightarrow & (x^2+2x+4, 5x) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & x-7y^2+x\cdot y \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x_1,x_2,x_3) & \rightarrow & (\cos(x_1\cdot x_2)+x_3, x_1^2+x_2^2+2x_3^2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \rightarrow & 3x\cdot y-2x^3 \end{array}$$

Aufgabe 23.7 Berechnen Sie nach der Kettenregel die Ableitungen der Funktion
$$f(g_1(x_1,x_2,x_3), g_2(x_1,x_2,x_3)),$$
wobei

$$\begin{array}{llll} 1. & f=y_1\cdot y_2 & g_1=x_1x_2x_3 & g_2=2x_1+3x_2x_3^2 \\ 2. & f=-y_1+y_2^2 & g_1=x_1+x_2+x_3 & g_2=x_1+\dfrac{x_2}{x_3} \end{array}$$

Aufgabe 23.8 Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen folgender Funktionen

a) $x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^3+4x_2^5$

b) $\dfrac{1}{x_1x_2^2}+\dfrac{x_1^2}{x_2}$

c) $x_1^{x_2}$

d) $ln\dfrac{x_1}{x_1-x_2}+2x_3$

Aufgabe 23.9 Zeichnen Sie das Höhenlinienbild der Funktion und skizzieren Sie den Graphen der Funktionen

a) $x_1\cdot x_2$ b) $x_1^2-x_2^2+5x_1+4x_2$ c) $2x_1+x_2$

Aufgabe 23.10 Es sei

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2+1} \end{array} \quad \text{und} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \to & (2t^2+1, t^3) \end{array}$$

a) Berechnen Sie $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Bestimmen sie Df und Dg sowie $D(f \circ g)$, ferner $D(Df)$ und $D(Dg)$ sowie $D(D(f \circ g))$.

Kapitel 24

Extrema bei Funktionen mehrerer Variablen

Aufgabe 24.1 Untersuchen Sie auf lokale Extrema:

a) $x_1^3 + 12x_1x_2 - 3x_2^2$ b) $(\sin x_1)(\cos x_2)$

c) $\dfrac{1}{3}x_1^3 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$ d) $x_1(100 - 2x_1 - 3x_2) + x_2(150 - 4x_1 - 3x_2)$

e) $2(x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \cdot e^{x_2}$ f) $18x_1^2x_2^2 - 2x_1^3x_2^2 - 4x_2^3x_1^2$

g) $xy^2 - 2xy + 2x^2 - 3x.$ h) $x_1^3 + \dfrac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 - 6x_1 + 2x_2 + 1$

i) $\dfrac{4x^2 + 4xy + y^2}{x^2 + 1}$ j) $\dfrac{x^2y^2z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$

k) $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - 2x + y^2 + 2}$ l) $x_1x_2e^{-(x_1+x_2)}$

m) $(x + 2y + 3z)^2 + (4x + 5y + 6z)^2 + (7x + 8y + 9z)^2$

n) $\dfrac{xy + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$ o) $x^2 - y^2 - zx + z^2y$

p) $-y^2 + 3yx^2 - 2x^4$ q) $x_1^3 - 12x_1 + x_2^3 - 27x_2 + 5$

r) $\dfrac{x + 2xy + x^2}{y^2 + 1}$ s) $xy^3 - 4xy + 4xy^2 - x$

t) $\sqrt{4x^2 + 3y^2 + 2}$ u) $\dfrac{x \cdot y}{x^2 + 1} - ln\ y, \quad y > 0$

Aufgabe 24.2 Für $a \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & -x^3 + 6axy - y^3 \end{array}$$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die lokalen Extrema von f_a.

Aufgabe 24.3 a) Untersuchen Sie die Funktion

$$ax_1^2 + x_1x_2 + ax_2^2 \text{ für } a = -1, 0, \frac{1}{2}, 1$$

auf die Existenz lokaler Extremstellen.

b) Zeichnen Sie die Höhenlinien im Falle $a = \frac{1}{2}$ und $a = 0$ zu den Werten $0, \frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}$.

Aufgabe 24.4 Es sei

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & \begin{cases} \dfrac{x^3y - y^3x}{x^2 + y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von f in allen Punkten von $\mathbb{R}^2$.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen von grad f.

c) Zeigen Sie, daß f im Nullpunkt keine Extremstelle besitzt.

Aufgabe 24.5 a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & 3xy - 2x^3 \end{array}$$

auf die Existenz lokaler Extremstellen.

b) Skizzieren Sie die Höhenlinien

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3xy - 2x^3 = a\} \text{ für } a < 0,\ a = 0 \text{ und } a > 0.$$

Aufgabe 24.6 Sei

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & 2(x^2+y^2)^{3/2} - 3(x^2+y^2) \end{array}$$

Bestimmen Sie

a) den Gradienten von f und seine Nullstellen,

b) die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen,

c) die lokalen Extremstellen von f.

Aufgabe 24.7 a) Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \to & x^2 + y^2 - zx + z^2 y \end{array}$$

b) Es sei

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & +\sqrt{2} \\ 1 & +\sqrt{2} & -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie: $u^T H u$ und $v^T H v$.

c) Begründen Sie warum H indefinit ist.

Aufgabe 24.8 Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Man berechne $\det(A)$.

b) Man zeige, daß A positiv definit ist.

c) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar; es sei $x^0 \in \mathbb{R}^4$ mit $Df(x^0) = \text{grad } f(x^0) = 0$. Es gelte weiter $H(x^0) = A$ (die Hesse'sche Matrix von f in x^0 sei gleich A). Was läßt sich über das Verhalten von f in x^0 sagen?

Aufgabe 24.9 a) Es sei $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^3 = y\}$.

$$\begin{array}{cccc} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \dfrac{x^2y^2 + z^6}{x^2 + 1} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Extremstellen von f.

b) Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^3\}$

$$\begin{array}{cccc} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & y \end{array}$$

Bestimmen Sie die Extremstellen von f.

Aufgabe 24.10 Es sei $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$.

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \dfrac{x^2 + y^2}{x \cdot y} \end{array}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen des Gradienten von f.

b) Untersuchen Sie die Hessematrix von f auf Definitheit.

c) Bestimmen Sie die Extremstellen von f.

Hinweis zu c): Berechnen Sie f in Polarkoordinaten und schätzen Sie ab.

Aufgabe 24.11 Es sei $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$.

$$\begin{array}{cccc} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & \dfrac{x + 2xy + x^3}{y} \end{array}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen des Gradienten von f.

b) Untersuchen Sie die Hessematrix von f an der Stelle $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ auf Definitheit.

c) Untersuchen Sie das Verhalten von f auf den Geraden

$$\begin{array}{rcll} G_1 & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\} & \text{und} \\ G_2 & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}\}. & \end{array}$$

Aufgabe 24.12 Es sei $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot y \cdot z \neq 0\}$ und

$$\begin{array}{cccc} f: & U & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \end{array}$$

Bestimmen Sie die Extremstellen von f.

Aufgabe 24.13 Es seien $x_1^2 + x_2^2 \leq 2$ und

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + \sqrt{2 - x_1^2 - x_2^2}$$

Bestimmen Sie das Maximum von f.

Aufgabe 24.14 Sei $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 2\pi\}$. Bestimmen Sie die Extrema von

$$f(x, y) = \cos x + \cos y - \cos(x + y)$$

auf M.

Aufgabe 24.15 Sie produzieren die Güter A und B, die in beliebigen (positiven) Mengen hergestellt werden können. Für eine Einheit von A erzielen Sie bei einem Angebot von x Einheiten von $A(2-10^{-7}x)$ GE. Der Preis für eine Einheit von B bei einem Angebot von y Einheiten von B ist $10^{-2}(1-10^{-9}y)$ GE. Die Gesamtkosten betragen bei der Produktion von x Einheiten A und y Einheiten B

$$x^2 - \frac{x \cdot y}{100} + \frac{y^2}{10000}\text{GE}.$$

Maximieren Sie den Gewinn.

Aufgabe 24.16 Die Reaktion $R(x,t)$, gemessen in geeigneten Einheiten, bei Verabreichung von x Einheiten einer Droge t Stunden nach Verabreichung , sei durch die Funktion

$$R(x,t) = x^2(3-x)t^2e^{-t} \qquad 0 \leq x \leq 3$$

gegeben.

1. Bei welcher Dosis ist die Reaktion am stärksten?
2. Nach welcher Zeit ist die Reaktion am stärksten?

Aufgabe 24.17 Ein Betrieb will durch Einstellung neuer Arbeitskräfte und durch Investitionen im Maschinenpark seinen Gewinn erhöhen. Bei der Investition von x_1 Geldeinheiten (GE) in Arbeitskräften und x_2 GE im Maschinenpark ist der zusätzliche Gewinn

$$G(x_1,x_2) = x_1^2x_2^2(6-x_1)(9-x_2) \text{ GE}.$$

Wieviel GE muß der Betrieb in zusätzlichen Arbeitskräften und wieviel im Maschinenpark investieren, damit der zusätzliche Gewinn maximal ist? Wie groß ist der zusätzliche maximale Gewinn?

Aufgabe 24.18 Die Wertschätzung eines Verbrauchers für drei Güter G_1, G_2 und G_3 ist gegeben durch die Nutzenfunktion (gemessen in geeigneten Einheiten)

$$x_1^2x_2x_3^2,$$

wobei x_1, x_2, x_3 die Mengeneinheiten der Güter G_1, G_2 bzw. G_3 angeben. Der Verbraucher hat ein Budget von 18 GE zur Verfügung. Wie muß er einkaufen, um maximalen Nutzen zu erzielen, wenn eine ME von G_1 2GE, von G_2 1GE und von G_3 HGE kostet?

Aufgabe 24.19 Ein Produzent produziert zwei Güter G_1 und G_2. Für eine ME des Gutes P_1 kann er bei einem Angebot von x_1 ME einen Preis von

$$10 - ax_1 \qquad \text{GE}$$

erzielen. Der entsprechende Preis für das zweite Gut ist

$$12 - bx_2.$$

Die Gesamtkosten bei einer Produktion von x_1 ME des Gutes G_1 und von x_2 ME des Gutes G_2 betragen

$$x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \qquad \text{GE.}$$

Wie muß der Produzent produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren?

Aufgabe 24.20 Ein Monopolist stellt zwei miteinander konkurrierende Güter G_1 und G_2 her. Ist p_1 der Preis einer ME von G_1 und p_2 der einer ME von G_2, so kann er

$$x_1 = 40 - 8p_1 + 4p_2 \qquad \text{ME von } G_1$$

$$x_2 = 20 + 2p_1 - 2p_2 \qquad \text{ME von } G_2$$

absetzen. Die Gesamtkostenfunktion bei einer Produktion von x_1 ME von G_1 und von x_2 ME von G_2 ist

$$k(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + x_1x_2.$$

1. Wieviel Mengeneinheiten muß er von G_1 und G_2 produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren?

2. Wie hoch sind die Preise im Gewinnmaximum?

3. Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Aufgabe 24.21 Es seien $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es sei

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \to & (x, g(x)) \end{array} \quad \text{und} \quad L : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \to & f(x, y) + z(y - g(x)) \end{array}$$

Rechnen Sie nach, daß $D(f \circ h)(x_0) = 0$ genau dann gilt, wenn

$$DL((x_0, g(x_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0))) = 0.$$

Aufgabe 24.22 Es sei

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \to & (x+2)(y+1). \end{array}$$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq c$, die Extrema der zusammengesetzten Funktion $f \circ h$ mit $h(x) = (x, dfracc - xab)$.

(Man sagt auch: die Extrema von f unter der Nebenbedingung: $xa + yb = c$.)

b) Untersuchen Sie die Funktion f selbst auf Extrema, und versuchen Sie den Graphen zu zeichnen.

Aufgabe 24.23 Auf dem Markt werden zwei Güter A, B - die in beliebigen positiven Quantitäten x bzw. y verfügbar seien - angeboten. Der Nutzen N für den Verbraucher sei durch eine differenzierbare Funktion $N(x, y)$ beschreibbar. Zum Ankauf von Gütern stehe Ihnen ein fester Betrag G zur Verfügung. Die Preise für die Güter A und B seien konstant. Rechnen Sie nach, daß in einen Nutzenextremum bei Ausgabe von G Geldeinheiten gilt:

$$\frac{\partial N}{\partial x} \cdot P_B = \frac{\partial N}{\partial y} P_A$$

Aufgabe 24.24 Sie seien Mühlenbesitzer. Ihr Mehl verkaufen Sie unter dem Markennamen Waste und Rubbish. Bei Produktion von x Tonnen Waste erlösen Sie pro Tonne $7000-20x$ DM; bei Produktion von y Tonnen Rubbish $4000 - 10y$ DM pro Tonne. An Kosten (unter anderem für Korn) fallen bei Herstellung von x Tonnen Waste und y Tonnen Rubbish $1400x^2 + 400xy + 200y^2$ DM an.

Maximieren Sie Ihren Gewinn! Wieviel wird im Gewinnmaximum hergestellt?

Aufgabe 24.25 Es werden Waren G_1, G_2 hergestellt. Der Preis p_1 für eine Mengeneinheit von G_1 bei einer Produktion von x_1 ME betrage: $p_1(x_1) = 20 - \frac{1}{100}x_1$

Entsprechend sei $p_2(x_2) = 1500 - \frac{1}{3}x_2^2$.

Die Gesamtkosten für die Produktion betragen $K(x_1, x_2) = \frac{99}{100}x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2^2$.

Maximieren Sie den Gewinn.

Aufgabe 24.26 Sie stellen in Ihrer Werkhalle Güter A und B her. Pro Mengeneinheit von $A[B]$ erlösen Sie bei Herstellung von $x[y]$ Einheiten von $A[B](200 - 3x)$GE $[(40 - y)$ GE] auf dem Markt. Für die Produktionsstätte erhalten Sie 80 GE Regierungssubventionen. Die Gesamtkosten für die Herstellung von x Einheiten A, y Einheiten B betragen

$$196x - 2x^2 + 32y\ GE$$

Maximieren Sie den Gewinn.

Aufgabe 24.27 Ein Betrieb kann Güter A, B in beliebigen positiven Quantitäten herstellen. Für eine Einheit von A erlöst der Betrieb DM 17, für eine Einheit von B nur DM 5. Bei der Herstellung von x_1 Einheiten A und x_2 Einheiten B fallen Kosten im Umfang von $6x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$ DM an.

Geben Sie den maximalen Gewinn an.

Aufgabe 24.28 Sie stellen Güter A, B und C her.

Bei Produktion von x Einheiten A erlösen Sie pro Einheit $(60 - 20x)\cdot$ DM, bei Produktion von y Einheiten B pro Einheit $(30 - 10y)\cdot$ DM, bei Produktion von z Einheiten C pro Einheit $(200 - 600z)$ DM. An Kosten fallen bei Herstellung von z Einheitenb A, y Einheiten B und z Einheiten C

$$(10x^2 + 20y^2 + 600z^2 + 20xy)\text{DM}$$

an. Maximieren Sie den Gewinn. Geben Sie an, wieviel im Gewinnmaximum hergestellt wird.

Aufgabe 24.29 Sie produzieren Klebeband und Kaugummi. Für einen Meter Klebeband erzielen Sie bei einem Angebot von x Metern Band $(2-10^{-7}\cdot x)$ Mark. Der Preis für 1 cm Kaugummi ist $10^{-2}(1 - 10^{-9}y)$ Mark bei einem Angebot von y cm Kaugummi. Die Gesamtkosten für x Meter Band und y cm Kaugummi betragen

$$x^2 - \frac{xy}{100} + \frac{y^2}{10000} \text{ Mark.}$$

Maximieren Sie den Gewinn.

Aufgabe 24.30 Sie stellen Güter A, B und C her.

Bei Produktion von x Einheiten A erlösen Sie pro Einheit $60-20x\cdot$ DM, bei Produktion von y Einheiten B pro Einheit $30-10y\cdot$ DM, bei Produktion von z Einheiten C pro Einheit $200-600z\cdot$ DM. An Kosten fallen bei Herstellung von x Einheiten A, y Einheiten B und z Einheiten C

$$10x^2 + 20y^2 + 600z^2 + 20xy \text{ DM an.}$$

Maximieren Sie den Gewinn. Geben Sie an, wieviel im Gewinnmaximum hergestellt wird.

Kapitel 25

Lagrangeverfahren

Aufgabe 25.1 Ermitteln Sie bei den nachfolgenden Funktionen die Stellen, an denen unter den angegebenen Nebenbedingungen die notwendigen Lagrangebedingungen für Extremstellen erfüllt sind.

a)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \to & x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} NB: & \varphi_1(x_1, x_2, x_3) & = & x_1^2 + x_2^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1, x_2, x_3) & = & x_2 + x_3 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \to & x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} NB: & \varphi_1(x_1, x_2, x_3) & = & 4x_1 + 12x_2 - 120 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1, x_2, x_3) & = & 6x_2 + 12x_3 - 120 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \to & x_1^2 + (x_2 - 17)^2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^4 + 2x_1^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

d)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \to & x_1^2-2x_2^2+7x_3 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^3-4\stackrel{!}{=}0$$

e)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \to & x_1+x_2+x_3 \end{array}$$

$$NB: \phi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-2\stackrel{!}{=}0.$$

f)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \to & x_1^2+x_2^2+x_3^2 \end{array}$$

$$NB: \phi(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3-3\stackrel{!}{=}0.$$

g)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,y_1,y_2) & \to & 2x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2+3y_1^2-6y_1y_2+3y_2^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} NB: & \varphi_1(x_1,x_2,y_1,y_2) & = & 4y_1-4x_1^2-12\stackrel{!}{=}0 \\ & \varphi_2(x_1,x_2,y_1,y_2) & = & y_2+x_2^2-6\stackrel{!}{=}0 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \to & 3x_1^2+2x_2^2+4x_3^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} NB: & \phi_1(x_1,x_2,x_3) & = & x_1+2x_2-8\stackrel{!}{=}0 \\ & \phi_2(x_1,x_2,x_3) & = & 4x_2-4x_3+12\stackrel{!}{=}0 \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3) & \to & x_1+x_2+x_3 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2x_3-64\stackrel{!}{=}0.$$

j)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \to & x_1^2 x_2 x_3^2 \end{array}$$

$$NB: \phi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 18 \stackrel{!}{=} 0.$$

k)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & x_1 + x_2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1, x_2) = \frac{a}{x_1} + \frac{b}{x_2} - 1 \stackrel{!}{=} 0.$$

l)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \to & x_1 \cdot x_2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0.$$

m)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \to & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \end{array}$$

$$NB: \begin{array}{rcl} \varphi_1(x) & = & x_1^2 + x_3^2 - 2 \stackrel{!}{=} 0, \\ \varphi_2(x) & = & -x_2 + x_4 + 4 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

n)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \to & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \end{array}$$

$$NB: \begin{array}{rcl} \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & x_1^2 + x_3^2 - 8 \stackrel{!}{=} 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & x_4 - 5x_2 + 10 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

o)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \to & 4x + 12y \end{array}$$

$$NB: \varphi(x, y) = x^2 + 2y^2 - 22 \stackrel{!}{=} 0$$

p)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4) & \to & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} NB: & \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_1 - 1)^2 + (x_3 - 2)^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) & = & (x_2 - 2)^2 + (x_4 - 1)^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

q)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \to & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 \end{array}$$

$$NB: \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_1 - 1)^2 + x_3^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (x_2 + 1)^2 + x_4^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$NB: \quad \varphi_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_3^2 - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\varphi_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 - 5x_2 + 10 \stackrel{!}{=} 0$$

s)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, x_3) & \to & (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - 5x_2 + 10)^2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 - 8 \stackrel{!}{=} 0$$

t)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2) & \to & (x_1-8)^2+(x_2-8)^2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x_1,x_2) = x_1^2+x_2^2-1 \stackrel{!}{=} 0$$

u)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \to & (x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} NB: & \varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_3^2-1 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_4-x_2^2-4 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

v)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x^2+7xy+y^6 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x,y) = 2y-4 \stackrel{!}{=} 0$$

w)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & x^3+3x^2y-3xy^2-y^3 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x,y) = 2x-2y \stackrel{!}{=} 0$$

x)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (a,b,c,d) & \to & (a-c+1)^2+(b-d-2)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} NB: & \varphi_1(a,b,c,d) = a^2+b^2-4 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(a,b,c,d) = c^2+d^2-16 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

z)

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \to & (x_1-x_4)^2+(x_2-x_4)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} NB: & \varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+x_3^3+2x_3^2-2x_3-2 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2-x_3^3-2x_3^2+2 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

zz)

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \to & (4x_1-3x_3)^2+(16x_2-x_4)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} NB: & \varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+6)^2+(x_2+9)^2-1 \stackrel{!}{=} 0 \\ & \varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_3 \stackrel{!}{=} 0 \end{array}$$

zzz)

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \to & (x-4)^2+(2y-3)^2 \end{array}$$

$$NB: \varphi(x,y) = x^2+4y^2-4 \stackrel{!}{=} 0$$

Aufgabe 25.2 Überprüfen Sie, ob an den in Aufgabe 25.1 gefundenen Stellen tatsächlich Extrema vorliegen.

Aufgabe 25.3 Es soll eine rechteckige Kiste mit einem Gesamtvolumen (d.h. Inhalt + Außenwände) von 0,729 m^3 durch eine Plastikhülle wasserfest gemacht werden. Da die Plastikmasse relativ teuer ist, soll die Kistenoberfläche minimal gehalten sein. Wie sind die Kistenmaße zu wählen?

Aufgabe 25.4 Sie bauen einen Kanal, dessen Querschnitt die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat. Die Querschnittsfläche ist mit 10 m^2 vorgeschrieben.

Minimieren Sie den Umfang.

Aufgabe 25.5 Ein rechteckiger, nach oben offener Behälter mit einem Inhalt von 108 l und einer Wandstärke von 2 cm soll unter möglichst geringem Materialaufwand hergestellt werden. Wie sind seine Abmessungen zu wählen?

Aufgabe 25.6 Finden Sie unter allen Quadern vom Volumen 1 m^3 denjenigen mit dem kleinsten Umfang.

Aufgabe 25.7 Bestimmen Sie die Extremstellen

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2(1-x_1-x_2)$$

Nebenbedingungen: $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1+x_2 \leq 1.$

Aufgabe 25.8 Es sei $A = (a_{ij})$ eine symmetrische $n \times n$-Matrix und

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & x^T A x. \end{array}$$

a) Rechnen Sie nach, daß
$$Df = 2Ax$$
gilt.

b) f besitzt eine Extremstelle x_1 unter der Nebenbedingung
$$\varphi(x) = x^T x - 1 \stackrel{!}{=} 0.$$
Rechnen Sie nach, daß der Lagrangemultiplikator der Eigenwert von A zum Eigenvektor x_1 ist.

Aufgabe 25.9 Gegeben sei das folgende Problem: "Extrema mit Nebenbedingungen"
$$f(x, y) = y.$$
$$NB : \varphi(x, y) = x^2 - y^3 = 0$$
"Jemand" löst dieses Problem wie folgt: Lagrangebedingungen:

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \Longleftrightarrow 0 + \lambda 2x = 0$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \Longleftrightarrow 1 - \lambda 3y^2 = 0$

3. $x^2 - y^3 = 0$

(1) ist äquivalent zu $\lambda = 0 \vee x = 0$.
$\lambda = 0$ ist unmöglich, da (2) äquivalent ist zu $\lambda 3y^2 = 1$.
$x = 0$ ist unmöglich, da wegen (3) dann $y = 0$ gelten müßte, womit $\lambda 3y^2 = 1$ wiederum unlösbar wird.
Folgerung: Es gibt kein Extremum von f unter der NB $\varphi = 0$. Geben Sie eine Stellungnahme zu dieser Lösung ab.

Aufgabe 25.10 Sie seien Besitzer eines Elektroladens und glauben, daß der Verkauf abhängig ist von der Anzahl der Verkäufer(innen) x_1 im Laden, der Anzahl der Handwerker(innen) x_2 in der Reparaturwerkstatt und der Anzahl der Angestellten x_3 in der Verwaltung.

Ihre Verkaufsfunktion ist:

$$S = 500x_1x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 8x_3$$

a) Wie verteilen Sie Ihre Mittel, wenn Sie insgesamt 12 Angestellte einstellen möchten?

b) Wie entscheiden Sie sich, wenn nur 4 Mitarbeiter eingestellt werden sollen?

Aufgabe 25.11 a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange den Abstand des Punktes (5,2) von der Parabel $y = x^2 + 2x$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode von Lagrange den Abstand des Punktes $(7, \frac{31}{2})$ von der Parabel $y = x^2 + 2x + 1$.

Aufgabe 25.12 a) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^3$ auf Extremstellen unter der Nebenbedingung $y \stackrel{!}{=} 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ auf Extremstellen unter der Nebenbedingung $x - y = 0$.

Kapitel 26

LP: Minimierungsprobleme

Aufgabe 26.1 Lösen Sie die folgenden linearen Minimierungsprobleme

$$c^T x \to \min \ \text{ unter den Nebenbedingungen}$$

$$1) Ax \geq b, x \geq 0 \quad 2) Ax \leq b, x \geq 0 \text{ und } 3) Ax = b, x \geq 0$$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 60 \\ 120 \\ 150 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 \\ 25 & 10 & 20 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 0,25 \\ 0,4 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 19 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 180 \\ 135 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 300 \\ 400 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} -40 \\ 110 \\ -110 \\ 170 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

k) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

l) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & y \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad y \in \mathbb{R}$

m) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

n) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\text{o)}\ A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}2\\5\\6\\10\\2\\6\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{p)}\ A=\begin{pmatrix}-1&-1&2&-1\\0&1&-1&-1\\-1&-1&-1&6\\-2&-2&3&0\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\\-5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{q)}\ A=\begin{pmatrix}-1&-1&1&-2\\1&1&0&-1\\0&1&0&2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{r)}\ A=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}850\\650\\300\\400\\500\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}1\\0,7\\0,6\\1\\0,8\\0,5\end{pmatrix}$$

$$\text{s)}\ A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\-2&4&-1&7\\8&1&-6&2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}8\\-2\\-1\end{pmatrix};\quad r=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\6\end{pmatrix}$$

$$\text{t)}\ A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\-1&0&1&2\\-1&1&0&0\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}6\\-1\\1\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{u)}\ A=\begin{pmatrix}-1&2&1&-1\\1&-1&1&0\\-1&1&2&1\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

v) $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

w) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

x) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 26.2 Untersuchen Sie die Optimierungsprobleme:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & \leq & 100 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 400 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 50 \end{array}$$

a) $3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \to \max$

b) $x_1 + x_2 - x_3 \to \min.$

Aufgabe 26.3 Untersuchen sie die Optiemierungsprobleme:

a) $$\begin{array}{rrcrcrl} & x_1 & - & 6x_2 & \leq & 7; & \quad x_1, x_2 \geq 0 \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 28 & \\ & 8x_1 & - & 7x_2 & \to & \max & \\ \text{bzw.} & 8x_1 & - & 7x_2 & \to & \min & \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcrcrcrl} x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & \leq & 20 & \\ -4x_1 & + & 9x_2 & - & 6x_3 & \leq & 400 & \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & \to & \max & \end{array}$$

Aufgabe 26.4 Minimieren sie $\Psi(x) = +x_1 - x_2$ unter den Nebenbedingungen

$$x \geq 0; Ax \leq b \text{ und } -2x_1 + x_2 + 2x_4 = 5$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & -4 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Kapitel 27

LP: Maximierungsprobleme

Aufgabe 27.1 Lösen Sie die folgenden linearen Maximierungsprobleme:

$$c^T x \to \max \text{ unter den Nebenbedingungen}$$

$$1)\ Ax \leq b, x \geq 0 \quad 2)\ Ax \geq b, x \geq 0 \text{und} 3)\ Ax = b, x \geq 0.$$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \\ 700 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 8 & 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$

j) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 170 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

k) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$

m) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 19 \\ 8 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

n) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

o) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

p) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

q) $A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

r) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 10 \\ 3 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 30 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

s) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

t) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & 10 & 2 \\ 20 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

u) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $\quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 27.2 Lösen Sie das lineare Optimierungsproblem:
Maximiere: $3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 + 8x_5 - x_6$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{lllllllll} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 + x_6 \leq 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 & & \\ x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 4 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 0 \leq x_1 \leq 2; & 0 \leq x_2 \leq 1; & 0 \leq x_3 \leq 3 \\ 0 \leq x_4 \leq 2; & 0 \leq x_5 \leq 3; & 0 \leq x_6 \leq 1 \end{array}$$

Aufgabe 27.3 Lösen Sie die folgenden Maximierungsprobleme

$$c^T x \to \max \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax \leq b, \quad x \geq 0$$

Formulieren Sie die dualen Probleme und geben Sie auch deren Lösung an.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 15 \\ 30 \\ 26 \\ 32 \\ 30 \\ 19 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 6 \\ 7 & 8 & 15 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 4 \\ 40 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 100 \\ 360 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$

Kapitel 28

LP: Anwendungsaufgaben

Aufgabe 28.1 Sie stellen Produkte A_i auf Fertigungsanlagen F_j her. Die Herstellung jeweils einer Einheit erfordert den nachfolgend unter ZA aufgeführten Zeitaufwand (in Stunden). Im Rechnungszeitraum haben die Fertigungsanlagen höchstens die unter BS beschriebenen Betriebsstunden. Für jeweils eine Einheit erzielen Sie die Preise P (in DM).

Maximieren Sie den Erlös und geben Sie an, welche Mengen im Optimum produziert werden. Geben Sie auch die Auslastung der Fertigungsanlagen an.

a) ZA:

	F_1	F_2	F_3
A_1	4	5	1
A_2	2	6	3
A_3	2	3	4

BS:

F_1	F_2	F_3
400	350	200

P:

A_1	A_2	A_3
20	18	10

b) ZA:

	F_1	F_2	F_3	F_4
A_1	3	6	4	2
A_2	2	2	1	6
A_3	4	3	8	1

BS:

F_1	F_2	F_3	F_4
500	600	800	400

P_1:

A_1	A_2	A_3
40	30	35

P_2:

A_1	A_2	A_3
40	60	35

c) ZA:

	F_1	F_2	F_3	F_4
A_1	3	2	1	2
A_2	2	1	1	1
A_3	1	1	0	1

BS:

F_1	F_2	F_3	F_4
300	200	100	400

P:

A_1	A_2	A_3
12	10	4

d) ZA:

	A_1	A_2	A_3	A_4
F_1	0	2	1	2
F_2	2	1	4	0
F_3	2	1	2	3

BS:

F_1	F_2	F_3
190	170	110

P:

A_1	A_2	A_3	A_4
4	3	1	2

e) ZA :

	F_1	F_2	F_3
A_1	2	0	2
A_2	1	2	1
A_3	2	1	4
A_4	3	2	0

BS_1:

F_1	F_2	F_3
12	20	16

BS_2:

F_1	F_2	F_3
15	20	16

P :

A_1	A_2	A_3	A_4
p	p	$3q$	q

Aufgabe 28.2 Sie produzieren an zwei Betriebsstätten A, B das gleiche Produkt. Damit die Produktion rentabel ist, muß A mindestens 900 ME und B mindestens 700 ME pro Tag herstellen. Die Produkte werden an drei Lager L_1, L_2, L_3 geliefert. Von Einzelhändlern werden täglich bei L_1 mindestens 300 ME, bei L_2 mindestens 250 ME und bei L_3 zumindest 200 ME abgerufen. Die Lieferung der Mindestmengen haben Sie zugesagt.

Die Transportkosten pro ME betragen in GE:

nach von	L_1	L_2	L_3
A	2	0,7	0,8
B	2	0,65	0,55

Wie müssen Sie produzieren, um bei Beachtung der Nebenbedingungen die Kosten zu minimieren?

Aufgabe 28.3 Ein Betrieb stellt vier Güter A, B, C, D her. Der Gewinn pro ME ist in Geldeinheiten:

Gut	A	B	C	D
Gewinn	14	12	8	4

Für die Produktion stehen pro Tag 100 Maschinenstunden und 340 Arbeitskraftstunden zur Verfügung. Für die einzelnen Produkte wird benötigt:

	Maschinenstunden	Arbeitsstunden
A	3	3
B	1	4
C	2	1
D	1/2	1/2

Wie muß der Betrieb produzieren, um den Gewinn zu maximieren?

Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Aufgabe 28.4 Die Firma Piph besitzt 3 Ölquellen $O_i, i = 1, 2, 3$, die im Rechnungszeitraum die folgenden maximalen Förderungen (in Barrel) erbringen können.

O_1	O_2	O_3
100.000	75.000	80.000

Piph verschifft sein Öl zu zwei Häfen H_1, H_2. Dort besteht eine Mindestnachfrage (in Barrel): $H_1 : 100.000$ $H_2 : 90.000$

Die Kosten für die Transporte verteilen sich wie folgt (in GE pro Barrel)

nach von	H_1	H_2
O_1	9	6
O_2	10	12
O_3	18	16

Minimieren Sie die Kosten unter den angegebenen Nebenbedingungen.

Aufgabe 28.5 Eine Elektronikfirma stellt Radios, Plattenspieler und Fernseher mit resp. Gewinn von 10 DM, 60 DM, 100 DM her. Sie beschäftigt maximal 30 Leute, die Fläche ihrer Produktionshalle beträgt $A\ m^2$. Zur Produktion eines Radios wird 1 Mann und $20m^2$ Produktionsfläche benötigt, für Plattenspieler 2 Mann und $30m^2$, für Fernseher 4 Mann und $25m^2$.

Wie soll die Firma produzieren, um maximalen Gewinn zu erwirtschaften,

i) wenn $A = 200$, ii) wenn $A = 400$ ist.

Aufgabe 28.6 Ein Bauer hat 121 Zentner Gerste und 49 Zentner Hafer. Er stellt zwei Sorten Hühnerfutter her:

I: 80% Gerste und 20% Hafer, II: 30% Gerste und 70% Hafer.

Wieviel Zentner der Sorten I und II soll er produzieren, wenn er seinen Gewinn maximieren will und er

I für 80,– DM pro Zentner, II für 50,– DM pro Zentner verkaufen kann?

Aufgabe 28.7 Ein Betrieb stellt Kaugummi und Teddybärchen her. Pro Packung beträgt der Preis 0,80 DM bzw. 0,85 DM. Die Herstellungskosten betragen 0,10 DM bzw. 0,08 DM. Zur Herstellung und Verpackung benötigen Sie zwei Maschinen A, B. Die Bearbeitungszeiten betragen (in Sekunden)

	A	B
T	2	8
K	3	2

Pro Woche laufen die Maschinen 40 Stunden. Maximieren Sie den Gewinn pro Woche!

Aufgabe 28.8 Ein Betrieb stellt vier Güter P_1, P_2, P_3, P_4 her. Der Gewinn pro ME ist in GE

Gut	P_1	P_2	P_3	P_4
Gewinn	12	8	10	1

Für die Produktion stehen pro Tag 50 Maschinenstunden und 120 Arbeitskraftstunden zur Verfügung. Für die einzelnen Produkte wird benötigt:

	Maschinenstunden	Arbeitsstunden
P_1	1	3
P_2	2	1
P_3	1	2
P_4	1	1

a) Wie muß der Betrieb produzieren, um den Gewinn zu maximieren?

b) Wie hoch ist der maximale Gewinn?

c) Bestehen Überkapazitäten bei optimaler Produktion?

d) Um wieviel steigt der Gewinn, wenn durch Investitionen

   i) 5 Maschinenstunden mehr zur Verfügung stehen?
   ii) 8 Arbeitsstunden mehr zur Verfügung stehen?

Aufgabe 28.9 In einem ruhigen Städtchen werden pro Tag die folgenden Anzahlen von Polizisten benötigt: Auf einer Station eines Krankenhauses werden pro Tag folgende Anzahlen von Krankenschwestern (Krankenpflegern) benötigt:

In einem Zoo werden die folgenden Anzahlen von Tierpflegern benötigt:

0 - 4 Uhr	2	12	800	3	3	12
4 - 8 Uhr	9	8	500	8	12	2
8 - 12 Uhr	12	15	100	11	10	3
12 - 16 Uhr	8	11	200	6	6	8
16 - 20 Uhr	12	5	400	12	12	11
20 - 24 Uhr	2	3	700	2	3	6

Jede Schicht dauert 8 Stunden.

a) Minimieren Sie die Gesamtzahl

b) In der Zeit von 22.00 Uhr - 6.00 Uhr sind 50 % Nachtzuschlag zu zahlen. Minimieren Sie die Gesamtkosten.

Aufgabe 28.10 Ein öffentlicher Verkehrsbetrieb benötigt an Fahrern:

Zeit	1-5	5-9	9-13	13-17	17-21	21-1	Uhr
Anzahl	15	30	26	32	30	19	

Die Schicht eines Fahrers ist 8 Stunden (am Stück). Schichtbeginn ist um 1, 5, 9, 13, 17, 21 Uhr. Wieviel Fahrer muß der Betrieb mindestens einstellen? Stellen Sie für diese einen Schichtplan auf.

Aufgabe 28.11 Auf den Großmärkten X, Y und Z kaufen Sie Kraftfutter für Ihre Legehennen ein. Bei X beträgt die Mindestabnahmemenge 4000 ME, bei Y 1000 ME und bei Z 600 ME. Zur Abnahme dieser Mengen haben Sie sich vertraglich verpflichtet. In Ihren eigenen Ställen S_1, S_2 werden in S_1 mindestens 3000 und in S_2 mindestens 1500 ME für die optimale Versorgung der Hühner benötigt (Zusatzrationen lassen sich aber immer noch unterbringen).

Die Transportkosten pro ME in GE von den Großmärkten zu den Ställen entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

nach / von	S_1	S_2
X	1	$\frac{1}{10}$
Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Z	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

a) Minimieren sie die Transportkosten unter Beachtung der Nebenbedingungen.

b) Wieviel Futter wird bei minimalen Transportkosten tatsächlich in S_1 bzw. S_2 angeliefert?

Aufgabe 28.12 Sie sollen einen Schichtplan erstellen. Schichtbeginn ist alle 4 Stunden, jede Schicht dauert 8 Stunden. Die nachfolgende Anzahl von Mitarbeitern muß anwesend sein:

8.00	-	12.00	10
12.00	-	16.00	15
16.00	-	20.00	8
20.00	-	24.00	10
0.00	-	4.00	3
4.00	-	8.00	1

a) Minimieren Sie die Gesamtzahl.

b) Da Sie bei den Lohnnebenkosten etwas sparen können, stellen Sie 5 Teilzeitmitarbeiter ein, die regelmäßig eine halbe Schicht arbeiten und um 8.00 Uhr, 12.00 Uhr oder 20.00 Uhr ihre Tätigkeit aufnehmen. Die Gesamtkosten pro Stunden für diese Mitarbeiter liegen um 10% unter den Kosten pro Stunde für Vollzeitkräfte.

   Minimieren Sie die Kosten.

   Wie viele Vollzeitarbeiter müssen Sie jetzt noch einstellen?

   Vergleichen sie die Kosten mit dem Modell aus a).

Aufgabe 28.13 Vier Verbraucher $V1, V2, V3, V4$ sollen von zwei Lagern $L1, L2$ mit jeweils 2 Gütern $G1, G2$ beliefert werden. Die Transportkosten in DM betragen pro Einheit.

von	L1		L2	
nach	$G1$	$G2$	$G1$	$G2$
$V1$	200	170	60	40
$V2$	150	120	40	20
$V3$	60	30	150	130
$V4$	80	50	160	140

Beliefert werden sollen die Verbraucher mindestens wie folgt:

	$G1$	$G2$
$V1$	20	10
$V2$	30	40
$V3$	120	30
$V4$	60	80

Die Gesamttransportkapazität der Lager für die einzelnen Güter beträgt:

	$L1$	$L2$
$G1$	110	150
$G2$	80	100

Minimieren Sie die Transportkosten unter Beachtung der Nebenbedingungen.

Aufgabe 28.14 Sie stellen an zwei Betriebsstätten $O.$, $H.$ Rohstahl her. Damit die Produktion rentabel ist, müssen in $O.$ mindestens 1000 ME und in $H.$ mindestens 800 ME pro Tag hergestellt werden. Der Stahl wird auf 3 Lager G, D und B verteilt. Für die Weiterverarbeitung werden aus G mindestens 500 ME, aus D mindestens 300 ME und aus B zumindest 650 ME abgerufen.

Die Transportkosten betragen in DM/ME:

nach von	G	D	B
O	2	0,8	1
H	2,1	0,7	0,7

Minimieren Sie die Kosten.

Aufgabe 28.15 Sie besitzen 3 Heilquellen A, B und C. Das Wasser aus allen Quellen wird unter demselben Markennamen verkauft und in vier Anlagen W, X, Y und Z auf Flaschen abgefüllt.

Die Quellen schütten folgende Mengeneinheiten Wasser pro Tag

A	B	C
1.000	5.000	3.000

Ihre Anlage verarbeiten folgende Mengen:

W	X	Y	Z
500	1.500	5.000	1.000

Die Transportkosten pro Mengeneinheit entnehmen Sie der Tabelle:

nach von	W	X	Y	Z
A	1	2	3	4
B	4	4	8	2
C	1	2	8	3

Minimieren Sie die Kosten.

Aufgabe 28.16 Sie sollen einen Schichtplan erstellen. Schichtbeginn ist alle 4 Stunden, jede Schicht dauert 8 Stunden. Die erste Schicht beginnt um 22.00 Uhr. Die Mindestanzahl von Mitarbeitern, die die Kunden ihres Unternehmens jeweils angemessen bedienen können, ist bekannt:

22.00	-	2.00	10	(1)
2.00	-	6.00	8	(2)
6.00	-	10.00	2	(3)
10.00	-	14.00	6	(4)
14.00	-	18.00	4	(5)
18.00	-	22.00	6	(6)

a) Minimieren sie die Gesamtzahl der Mitarbeiter.

b) Sie haben Schwierigkeiten, Mitarbeiter für Schichtbeginn (2), (3) und (4) zu gewinnen und zahlen daher für:

Beginn um	2.00,	100 %	Zuschlag
Beginn um	6.00,	75 %	Zuschlag
Beginn um	10.00,	50 %	Zuschlag.

Minimieren Sie Ihre Kosten.

Wieviele Mitarbeiter benötigen Sie im Kostenminimum?

Aufgabe 28.17 Eine Bank habe 100 Millionen DM zur Verfügung. Dieses Geld steht für Kredite an Kunden und für den Ankauf von Rentenpapieren prinzipiell zur Verfügung. Kredite erbringen höhere Zinsen, Rentenpapiere sichern die Liquidität. Nehmen Sie an, daß Kredite 10% Zins und Rentenpapiere 5% erbringen. Ein Minimum von 25% des <u>insgesamt</u> ausgebrachten Geldes benutzen Sie zur Liquiditätssicherung, aber mindestens 30 Millionen DM müssen Sie für Ihre bevorzugten Kunden an Krediten freigeben können.

Maximieren Sie unter diesen Annahmen die Zinseinnahmen.

Aufgabe 28.18 Sie besitzen 3 Maschinen A_1, A_2, A_3 auf denen Sie Güter G_1, G_2, G_3 herstellen können. Zur Produktion von je einer Einheit benötigt man die folgenden Betriebsstunden auf den Maschinen:

auf für	A_1	A_2	A_3
G_1	6	9	8
G_2	8	2	4
G_3	4	6	1

Die Maschinen stehen höchstens zur Verfügung

$$A_1 : 600 Std., \quad A_2 : 550 Std., \quad A_3 : 400 Std.$$

Die Werkstücke werden zu folgenden Stückpreisen abgesetzt:

$$G_1 : 20,00 DM, \quad G_2 : 15,00 DM, \quad G_3 : 10,00 DM.$$

Maximieren Sie die Gesamteinnahmen.

Aufgabe 28.19 Eine Firma produziert Waren A und B. Zur Produktion einer Einheit von A werden 2 Einheiten von B, 2 Einheiten eines Rohstoffes C und 10 Arbeitsstunden benötigt. Zur Produktion einer Einheit von B werden 3 Einheiten von C und 5 Arbeitsstunden benötigt. Die Ware B kann auch für DM 100,– pro Einheit auf dem Markt eingekauft werden. Die Ware C kann für DM 10,– pro Einheit eingekauft werden. In dem betrachteten Zeitraum stehen maximal 1500 Arbeitsstunden zur Verfügung. Die Erlöse betragen DM 90,– für eine Einheit von B und DM 360,– für eine Einheit von A.

Aufgabe 28.20 Sie stellen ein Produkt A her. Zur Produktion von einer Einheit von A wird eine Einheit eines Rohstoffes B benötigt. Folgende Konditionen sind gegeben:

1) <u>Eine</u> Einheit von A kann gegen <u>zwei</u> Einheiten von B getauscht werden (Kompensationsgeschäft).

2) Die Einheiten von A können zu 20,– DM pro Einheit verkauft werden.

3) Der Rohstoff B kann für 12,– DM pro Einheit gekauft werden.

4) Sie können vorhandene Einheiten von B für 9,– DM pro Einheit auf dem Markt absetzen.

5) Im betrachteten Zeitraum können Sie höchstens 200 Einheiten A herstellen.

Ihr Problem ist, den Gewinn zu maximieren.

Aufgabe 28.21 Sie besitzen 3 Maschinen A_1, A_2, A_3, auf denen Sie die Güter X_1, X_2, X_3 und X_4 herstellen können. Zur Herstellung jeweils einer Einheit der Güter benötigen Sie die nachstehend aufgeführten Betriebszeiten auf den Maschinen (in Stunden):

auf für	A_1	A_2	A_3
X_1	6	9	12
X_2	8	2	1
X_3	4	9	3
X_4	2	2	1

Die Maschinen haben die folgenden maximalen Betriebsstunden:

$$A_1 = 500; \quad A_2 = 600; \quad A_3 = 550.$$

Sie erzielen pro Stück die folgenden Einnahmen: (Sie können beliebige Mengen zu konstanten Stückpreisen absetzen!)

$$X_1 = 15,-DM; \quad X_2 = 12,-DM; \quad X_3 = 13,-DM; \quad X_4 = 3,50DM.$$

Maximieren Sie die Gesamteinnahmen.

Aufgabe 28.22 An den Produktionsstätten A und B gewinnen Sie einen Rohstoff X, der zur weiteren Bearbeitung nach C, D und E verbracht wird. Der Bedarf in

C ist	1000	Einheiten
D ist	2000	Einheiten
E ist	500	Einheiten.

Aufgrund beschränkter Lagerkapazität kann C höchstens 1200 Einheiten aufnehmen. In D ist keine Lagermöglichkeit gegeben und in E bestehen diesbezüglich keinerlei Probleme. Die Höchstfördermenge in A beträgt 1500 E, in B 4000 E. Sie haben sich zu einer Gesamt-Mindestförderung von 4000 E verpflichtet. Die Transportkosten pro Mengeneinheit in GE entnehmen Sie der folgenden Tabelle:

nach von	C	D	E
A	4	1	2
B	3	2	6

Minimieren Sie die Kosten, wenn die Lagerkosten in C pro ME $2GE$ und in E $1GE$ betragen. Welche Mengen werden im Kostenminimum produziert, welche Mengen in C und E angeliefert?

Aufgabe 28.23 Ein Betrieb stellt vier Güter A, B, C und D her. Der Gewinn pro Mengeneinheit:

Gut	A	B	C	D
Gewinn (in DM)	14	12	8	4

Für die Produktion stehen pro Tag 100 Maschinenstunden und 340 Arbeitskraftstunden zur Verfügung. Es werden benötigt:

	Maschinenstunden	Arbeitsstunden
A	3	4
B	1	4
C	2	1
D	1/2	1/2

Wie muß der Betrieb produzieren, um seinen Gewinn zu maximieren? Wie hoch ist der maximale Gewinn?

Aufgabe 28.24 Das nachfolgende Leitungssystem hat auf jedem Abschnitt die angegebenen Kapazitäten (in Mengeneinheiten)

nach von	B	C	D	E	F	G
A	1	0	300	0	90	0
B	-	70	0	0	0	10
C	0	-	0	50	0	100
D	0	100	-	70	50	0
E	150	0	0	-	0	0
F	0	80	0	20	-	200

In B, C, D, E und F bestehen keine Möglichkeiten, Material zu lagern, herzustellen oder zu vernichten. Wieviel Material können Sie höchstens bei A einfüllen? Formulieren Sie die Frage als lineares Optimierungsproblem. Eine Rechnung wird nicht erwartet.

Aufgabe 28.25 Sie stellen auf 4 Fertigungsanlagen die Güter A, B und C her. Zur Herstellung jeweils einer Einheit benötigen Sie die folgenden Zeiten (in Stunden) auf den Fertigungsanlagen:

	A	B	C
F_1	20	4	13
F_2	20	5	16
F_3	22	16	29
F_4	2	8	1

Die Anlagen haben im Rechnungszeitraum höchstens folgende Betriebsstunden:

F_1	F_2	F_3	F_4
1040	1190	2080	320

Für eine Einheit erlösen Sie die folgenden Beträge (in DM):

A	B	C
200	10	5

a) Maximieren Sie den Erlös unter der Nebenbedingung, daß die zulässigen Betriebsstunden der Fertigungsanlagen nicht überschritten werden.

b) Maximieren Sie den Erlös unter der Nebenbedingung, daß alle Fertigungsanlagen vollständig ausgelastet werden.

Aufgabe 28.26 Ein Landwirt baut Weizen, Hafer und Raps auf maximal 45 ha an. Er darf insgesamt 100 ME "Naturdünger" aufbringen. Die erforderlichen Mittel zur Erbringung von jeweils einer Mengeneinheit der Frucht und die jeweiligen Gewinne entnehme man der folgenden Tabelle:

	Fläche	Dünger	Gewinn
Weizen	2	3	135
Hafer	2	2	90
Raps	1	1	70

Maximieren Sie den Gewinn.

Aufgabe 28.27 Ein Klein Unternehmer hat drei Maschinen M_1, M_2, M_3 auf denen vier verschiedene Sorten Schrauben S_1, S_2, S_3, S_4 hergestellt werden können. Gewinn pro Stück (in Pfennig):

S_1	S_2	S_3	S_4
2	4	1	1

nötige Kapazität:

	S_1	S_2	S_3	S_4	Gesamtkapazität
M_1	4	2	4	6	24
M_2	0	4	2	4	40
M_3	4	2	8	0	32

Maximieren Sie den Gewinn.

Kapitel 29

LP mit Parametern

Aufgabe 29.1 Lösen Sie die Maximierungsprobleme

$$c^T x \to \max, \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax \leq b, x \geq 0$$

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -40 \\ 110 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 12 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 160 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 160 \\ 200 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 24 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 149 \end{pmatrix}$,

$b_2 = \begin{pmatrix} 55 \\ 200 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 45 \\ 10 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 50 \\ 150 \end{pmatrix}$, $b_5 = \begin{pmatrix} 50 \\ 151 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 120 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}^2$; $\quad c = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; $b_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; $b_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \end{pmatrix}$; $b_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \end{pmatrix}$; $r = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$

Aufgabe 29.2 Lösen Sie die folgenden linearen Maximierungsprobleme

$$c^T \to \max, \text{ unter den Nebenbedingungen } Ax \leq b; x \geq 0$$

a) $A = \begin{pmatrix} 15 & -15 & 10 & -10 \\ 12 & 3 & 28 & 2 \\ 6 & 9 & 26 & 7 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 35 \\ 188 \\ 184 \end{pmatrix}$;

$c_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}$, $c_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0,2p_2 \end{pmatrix}$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 29.3 Zeigen sie, daß der Simplexalgorithmus für das Maximierungsproblem

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nicht zum Erfolg führt. Erklären Sie dieses Verhalten.

Aufgabe 29.4 Es sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Maximieren Sie

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} & \to & 7x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 9x_4 \end{array}$$

unter der Nebenbedingung

$$Ax \leq \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}; \quad x \geq 0; \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+.$$

Bestimmen Sie auch für alle (r_1, r_2) eine Maximalstelle.

Aufgabe 29.5 Lösen Sie das Maximierungsproblem $f(x_1, x_2, x_3) = 12x_1 + 8x_2 + 9x_3 \to \max$ unter den Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & + & 50t \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 5 & + & 200t \end{array}$$

für $0 \leq t \leq 1$. Skizzieren Sie $\max(f)$ als Funktion von t.

Aufgabe 29.6 Lösen Sie das Optimierungsproblem:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 60 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 205 \end{array}\right. ; x \geq 0.$$

$$(4 + 8t)x_1 + (9 - t)x_2 + 9x_3 \to \max \text{ für } 0 \leq t \leq 1.$$